1. *Melyik mátrixok diagonalizálhatók $\mathbb{C}$ fölött a következők közül? $A^n =$?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A 2×2-es mátrixnak két különböző sajátértéke van, 1 és 2, így biztosan diagonalizálható. Egyik lehetséges diagonális alakja $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, a diagonalizáló mátrix oszlopai a megfelelő sajátértékhez tartozó egy-egy sajátvektor, tehát például $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, és ebből

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

A B mátrix karakterisztikus polinomja $(x+1)^2$, de a -1-hez tartozó sajátaltér csak egydimenziós (a $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektor generálja), így a mátrix nem diagonalizálható.

Eredetileg a feladatsorban tévesen a $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix szerepelt. Az a mátrix diagonalizálható, mert két különböző sajátértéke van: $-1 \pm \sqrt{2}$, és ebből adódóan nem túl barátságos az n-edik hatványa, de azért ha valaki kiszámolta, és ellenőrizni akarja, itt a végeredmény:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}((-1+\sqrt{2})^{n-1} + (-1-\sqrt{2})^{n-1}) & \frac{1}{2\sqrt{2}}((-1+\sqrt{2})^n - (-1-\sqrt{2})^n) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-(-1+\sqrt{2})^n + (-1-\sqrt{2})^n) & -\frac{1}{2}((-1+\sqrt{2})^{n+1} + (-1-\sqrt{2})^{n+1}) \end{bmatrix}$$

A C mátrix sajátértékei 0, 1 és -1, és független sajátvektorok kell, hogy tartozzanak hozzájuk, tehát C diagonalizálható, és diagonális alakjának átlójában a 0, 1 és -1 számok állnak. Viszont az utóbbi D diagonális mátrixról rögtön látszik, hogy $D^3 = D$, így $C^3 = PD^3P^{-1} = PDP^{-1} = C$, és emiatt $C^n = C$, ha n páratlan, és $C^n = C^2$, ha $n > 0$ páros.

D karakterisztikus polinomja $-(x+2)(x-1)^2$, így sajátértékei 1 és -2. 1-hez kétdimenziós sajátaltér tartozik, amelyet kifeszítenek például az $(1,0,0)^T$ és $(0,0,1)^T$ vektorok, -2-höz pedig a $(-2,1,1)^T$ jó sajátvektor. Ebből következik, hogy D diagonalizálható, hiszen létezik $\mathbb{C}^3$-nek D sajátvektoraiból álló bázisa, és

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 + (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & -1 + (-2)^n & 1 \end{bmatrix}.$$

2. *Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-normálalakja?*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$; *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; *d)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Megoldás: *a)* A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait a karakterisztikus polinom kiszámítása nélkül is megtaláljuk. Első látásra észrevehetjük, hogy a mátrix csak 1 rangú, tehát a 0 sajátértéke $(n-1)$-dimenziós sajátaltérrel. Ezenkívül, mivel minden sor összege n, az $(1,1,\dots,1)^T$ vektor sajátvektor, n sajátértékkel. Ezekből már következik, hogy a mátrix diagonalizálható, és diagonális alakjának (amely egyúttal Jordan-féle normálalakja is) átlójában $n-1$ darad 0, és egy n áll.

b) Mivel a mátrix felső háromszög alakú, rögtön leolvashatjuk a sajátértékeket: ezek az átlóelemek, 2, 0 és -5. A 3×3-as mátrixnak van három különböző sajátértéke, így diagonalizálható, és Jordan-féle normálalakja az a diagonális mátrix, amelynek átlójában 2, 0 és -5 áll.

c) A *b*) esethez hasonlóan leolvashatjuk a sajátértékeket: 2 és 5, ahol 2 kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, így a Jordan-normálalak átlójában is kétszer szerepel. Az csak a kérdés, hogy egy 2×2-es vagy két 1×1-es Jordan-blokk tartozik hozzá. Ezt eldönthetjük a 2-höz tartozó sajátaltér dimenziója alapján: az adja meg a 2-höz tartozó Jordan-blokkok számát. Az $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenletrendszert megoldva (ahol A a szóbanforgó mátrix) azt látjuk, hogy a megoldástér egydimenziós (az $(1, 0, 0)^T$ vektor feszíti ki), így a Jordan-normálalak nem diagonális, hanem a következő alakú:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

d) A mátrix karakterisztikus polinomja $-(x^3 - 1)$, és ennek három különböző gyöke van, így a mátrix diagonalizálható, és Jordan-féle normálalakja az a diagonális mátrix, amelynek átlójában $x^3 - 1$ három gyöke áll, azaz 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. *Maximum hány olyan páronként nem hasonló (komplex) mátrixot lehet megadni, amelynek a karakterisztikus polinomja $(x - 1)^3 \cdot (x - 2)^2$?*

Megoldás: A kérdés átfogalmazható úgy, hogy hány lényegesen különböző Jordan-normálalakot találunk (tehát amelyben nem ugyanannyi van az egyes sajátértékekhez tartozó adott méretű blokkokból) a megadott karakterisztikus polinomhoz, hiszen két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van azonos Jordan-mátrixuk. Mivel 1 háromszoros, 2 pedig kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, az 1-blokkok méreteinek összege 3, a 2-blokkoké pedig 2. Így az 1-blokkokra három lehetőség van (egy 3×3-as, egy 2×2-es egy 1×1-essel, vagy három darab 1×1-es), a 2-blokkokra pedig kettő (egy 2×2-es vagy két 1×1-es), tehát összesen $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség van.

4. *Van-e olyan komplex elemű mátrix, amelynek a karakterisztikus és minimálpolinomja a következő?*

a) $p_1(x) = (x - 1)^2 (x - 2)^3$, $\quad m_1(x) = (x - 1)(x - 2)^2$;
b) $p_2(x) = x^6 + x + 1$, $\quad m_2(x) = x^2 + x + 1$;
c) $p_3(x) = (x - 1)^2 (x - 2)^3 (x - 5)$, $\quad m_3(x) = (x - 1)^2 (x - 2)^2$;
d) $p_4(x) = (x^3 - x - 4)^2$, $\quad m_4(x) = (x^3 - x - 4)$.

Megoldás: *a*) Van: például egy olyan Jordan-mátrix, amelynek két 1×1-es 1-blokkja, továbbá egy 2×2-es és egy 1×1-es 2-blokkja van. Erre teljesül, hogy az egyes sajátértékek multiplicitása $p_1(x)$-ben a megfelelő blokkok méreteinek összege, az $m_1(x)$-beli multiplicitása pedig a blokkok száma.
b) Nincs, mert $m_2(x)$ nem osztója $p_2(x)$-nek.
c) Nincs, mert $p_3(x)$-nek van olyan gyöke, amely nem gyöke $m_3(x)$-nek.
d) Létezik ilyen. Bár a karakterisztikus polinom gyökeit nem tudjuk megmondani, azt tudjuk, hogy $x^3 - x - 4$ minden gyöke egyszeres (például mert a polinom relatív prím a deriváltjához), tehát a mátrix diagonalizálható, és a Jordan-normálalak olyan diagonális mátrix, amely $m_4(x)$ minden gyökét kétszer tartalmazza. *(Mellesleg bármilyen polinomot választottunk volna $m(x)$-nek, ha $p(x) = m(x)^2$, akkor találunk hozzá $p(x)$ karakterisztikus polinomú és $m(x)$ minimálpolinomú mátrixot. Legyen B az $m(x)$ kísérőmátrixa, azaz amely a $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n$ bázison úgy hat, hogy $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_2 \mapsto \cdots \mathbf{b}_n$, és $\mathbf{b}_n$ képét, azaz az $A^n\mathbf{b}_1$ vektort az $m(A) = 0$ összefüggésből számítjuk ki. Könnyen látható, hogy ennek a mátrixnak a karakterisztikus és minimálpolinomja is $m(x)$, és így annak a blokkdiagonális mátrixnak, amelynek két B-vel azonos blokkja van, $p(x)$ lesz a karakterisztikus polinomja, és $m(x)$ a minimálpolinomja.)*

5. *Van-e olyan 3×3-as mátrix $\mathbb{Q}$ fölött, amelynek minimálpolinomja*

a) $x^2 - 2$;
b) $x^2 + x$?

Megoldás: a) Nincs ilyen, mert akkor a karakterisztikus polinomnak is csak $\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$ lehetnének a gyökei, de akkor a karakterisztikus polinom konstans tagja $\pm 2\sqrt{2}$, amely nem racionális.
b) $x^2+x=x(x+1)$, így a keresett mátrix Jordan-normálalakja csak diagonális lehet, 0 és -1 átlóelemekkel, és minden ilyen meg is felel, tehát a $0,0,-1$,illetve $0,-1,-1$ átlóelemeket tartalmazó mátrixok, illetve ezeknek racionális mátrixszal való konjugáltjai is jók.

6. *Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók az* $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *mátrixhoz?*

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A és B mátrixok nem hasonlók, mert karakterisztikus polinomjuk nem $(x-1)(x+1)$ (sőt, B mégcsak nem is invertálható). C-nek és D-nek $(x-1)(x+1)$ a karakterisztikus polinomja, és mivel ennek minden gyöke különböző, C, D és az eredetileg megadott mátrix is diagonalizálható, vagyis hasonló az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz, és így egymáshoz is.

7. *Adjunk meg ortogonális, illetve ortonomált bázist az* $\mathbb{R}^4$ *vektortér* $(1,2,-1,0)$, $(2,1,0,1)$ *és* $(1,-1,1,-1)$ *vektorok által generált alterében.*

Megoldás: Legyen $\mathbf{v}_1=(1,2,-1,0)$, $\mathbf{v}_2=(2,1,0,1)$ és $\mathbf{v}_3=(1,-1,1,-1)$. Ekkor az ortogonális bázis elemeit megkaphatjuk Gram–Scmidt-ortogonalizálással. Az első elem legyen $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1$. A második lehet $\mathbf{v}_2-(\mathbf{v}_2\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1/\mathbf{u}_1^2=(2,1,0,1)-\frac{2}{3}(1,2,-1,0)=(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)$, de választhatjuk ennek egy skalárszorosát is: $\mathbf{u}_2=(4,-1,2,3)$. A harmadik elemnek választható a $\mathbf{v}_3-(\mathbf{v}_3\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1/\mathbf{u}_1^2-(\mathbf{v}_3\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2/\mathbf{u}_2^2=(1,-1,1,-1)+(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0)-(\frac{8}{15},-\frac{2}{15},\frac{4}{15},\frac{6}{15})=(\frac{4}{5},-\frac{1}{5},\frac{2}{5},-\frac{7}{5})$ vektornak, de ennek egy szebb skalárszorosának is: $\mathbf{u}_3=(4,-1,2,-7)$. Tehát $\mathbf{u}_1=(1,2,-1,0)$, $\mathbf{u}_2=(4,-1,2,3)$ és $\mathbf{u}_3=(4,-1,2,-7)$ ortogonális bázisát alkotják a megadott altérnek, és ezeket a vektorokat lenormálva az

$$\{\,\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0),\ \frac{1}{\sqrt{30}}(4,-1,2,3),\ \frac{1}{\sqrt{70}}(4,-1,2,-7)\,\}$$

ortonormált bázist kapjuk.