Lineáris algebra **2. zh** *2009. december 3.*

1. Adjuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek egy olyan elemét, amely benne van az $(1,-1,2,0)$, $(1,1,1,0)$, $(0,2,-3,1)$ vektorok által generált altérben, de a $(2,0,1,1),(1,1,-1,1)$ által generált altérben nem.

2. Határozzuk meg az alábbi $n \times n$-es determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Legyen $\mathbf{a} = (1,1,1)$. Határozzuk meg a valós tér $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - \frac{1}{3}(\mathbf{av})\mathbf{a}$ lineáris transzformációjának magterét és képterét egy bázisának megadásával.

4. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-y+z, x+y, 2y-z)$ lineáris transzformáció mátrixát a standard $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ bázisban és a $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(1,1,2),(0,-2,-5)\}$ bázisban.

5. Tegyük fel, hogy egy lineáris transzformációnak az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorok mindegyike sajátvektora. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ugyanahhoz a sajátértékhez tartoznak.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy négyzetes mátrixnak mindig meg lehet változtatni a rangját egyetlen alkalmas elemének a megváltoztatásával.

Lineáris algebra **2. zh** *2009. december 3.*

1. Adjuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek egy olyan elemét, amely benne van az $(1,-1,2,0)$, $(1,1,1,0)$, $(0,2,-3,1)$ vektorok által generált altérben, de a $(2,0,1,1),(1,1,-1,1)$ által generált altérben nem.

2. Határozzuk meg az alábbi $n \times n$-es determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Legyen $\mathbf{a} = (1,1,1)$. Határozzuk meg a valós tér $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - \frac{1}{3}(\mathbf{av})\mathbf{a}$ lineáris transzformációjának magterét és képterét egy bázisának megadásával.

4. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-y+z, x+y, 2y-z)$ lineáris transzformáció mátrixát a standard $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ bázisban és a $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(1,1,2),(0,-2,-5)\}$ bázisban.

5. Tegyük fel, hogy egy lineáris transzformációnak az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorok mindegyike sajátvektora. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ugyanahhoz a sajátértékhez tartoznak.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy négyzetes mátrixnak mindig meg lehet változtatni a rangját egyetlen alkalmas elemének a megváltoztatásával.