1. Egy egység élű kocka alaplapja az $ABCD$ négyzet, fedőlapja $A'B'C'D'$, ahol az egyes csúcsok az alapon azonos betűvel jelzett csúcsok fölött vannak. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:
$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{B'C'}|$, $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$, $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C}$, $\quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'}$, $\quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'}$ $\quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC'}$.

2. Tegyük föl, hogy a C pont $m : n$ arányban osztja két részre az AB szakaszt. Jelöljön O egy tetszőleges pontot. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OC}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok, valamint m és n segítségével.

3. Mely $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra teljesülnek az alábbi összefüggések?

a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;
b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;
c) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

4. Legyen O az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ csúcspontok által meghatározott szabályos n-szög középpontja. Határozzuk meg az $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ vektorösszeget.

5. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymással nem párhuzamos vektorok. Milyen α, β, γ és δ együtthatók esetén lesz $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ párhuzamos a $\gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b}$ vektorral?

6. Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéder térfogatát, ha a csúcsok koordinátái: $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, -1)$, $C(1, 1, 1)$ és $D(0, 4, 1)$.

7. a) Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ és $\mathbf{b} = (-2, -1, 1)$ vektorok szögét.
b) Adjuk meg az $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ vektor merőleges vetületét a $\mathbf{b} = (2, -1, 2)$ vektorra.

8. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét, ha tudjuk, hogy $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a} - \mathbf{b}$-re, továbbá $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{b}$-re.

9. Ha $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re, akkor mivel egyenlő az $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})))$?

10. Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. Bizonyítsuk be, hogy

a) P akkor és csak akkor van rajta a P_0-t tartalmazó, az $\mathbf{n} = (a, b, c)$ vektorra merőleges síkon, ha $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$;
b) P akkor és csak akkor van rajta a P_0-on átmenő, a $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorral párhuzamos egyenesen, ha van olyan $t \in \mathbb{R}$, amelyre $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.

Írjuk fel a kapott egyenleteket koordinátákkal is!

11. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $(1, 0, 3)$ ponton, és tartalmazza az $\dfrac{x-1}{2} = y = -\dfrac{z}{3}$ egyenest.

12. Írjuk fel az $x = -1 + 5s$, $y = 4s$, $z = 1 + 2s$ $(s \in \mathbb{R})$ és az $x = 2t$, $y = t$, $z = 3$ egyenesek szögfelező egyeneseinek egyenletrendszerét.

13. Mi az $(1, 2 - 1)$ pont tükörképe az

a) $x + y + 3z = 0$, illetve az b) $x - y + z = 0$ síkra nézve?

14. Forgassuk el a $(0, 1, -2)$ pontot az $x = y = z$ egyenes körül $90°$-kal, az egyenes "pozitív vége felől" nézve pozitív irányban.

15. Fejezzük ki vektorműveletekkel egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{nr} = \mathbf{0}$ síkra vonatkozó tükörképét, illetve egy $\mathbf{b}$ irányvektorú, origón átmenő egyenes körüli $90°$-os elforgatottját.

Hf1. Egy háromszög harmadolóvonalának hívjuk azt a szakaszt, amelyik egy csúcsot a szemközti oldal valamelyik harmadolópontjával köt össze. Bizonyítsuk be, hogy a súlyvonal negyedeli a háromszög (egyik) harmadolóvonalát! Milyen arányban osztja ez a harmadolóvonal a súlyvonalat?

Hf2. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hossza 1 és 2, a $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektoré pedig 2. Határozzuk meg $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögét!

Hf3. Tekintsük egy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra az $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$, $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$, … sorozatot. Hányadik lehet az első $\mathbf{0}$ vektor a sorozatban. Ha ilyen nincs, hány különböző iránya van a sorozatban szereplő vektoroknak?