1. Bizonyítsuk be, hogy egy félcsoportban az $a_1 \cdots a_n$ szorzat bármely zárójelezése ugyanazt az elemet adja.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes félcsoportban
a) ha a és b invertálható, akkor ab és ba is invertálható;
b) ha ab és ba invertálható, akkor a és b is invertálható.
c) Egy halmaz önmagába menő leképezései egységelemes félcsoportot alkotnak a kompozícióra nézve. Lássuk be, hogy végtelen halmaz esetén van ebben olyan a és b elem, amelyre ab invertálható, de a és b nem.

3. Gyűrűt, illetve testet alkot-e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a komponensenkénti műveletekre nézve (azaz: $(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c, b\cdot d)$ és $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$)? Van-e egységelem, nullelem?

4. Lássuk be, hogy tetszőleges gyűrűben $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ minden a elemre, továbbá $(a(-b) = (-a)b = -(ab)$ minden a, b-re.

5. a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}$-nak nincs olyan valódi részhalmaza, amely az eredeti műveletekkel testet alkot.
b) Bizonyítsuk be, hogy a legkisebb olyan résztest $\mathbb{R}$-ben, amely tartalmazza a $\sqrt{2}$ számot, az $\{\, a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\}$.

6. Adjuk meg az alábbi komplex számok kanonikus (algebrai) alakját:
a) $z = (3-4i)(7+8i)$; b) $z = \dfrac{3-4i}{2-i}$; c) $z = i^{1994}$; d) $z = (1+i)^9$.

7. a) Számítsuk ki a $16 - 30i$ komplex szám négyzetgyökeit.
b) Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok körében minden számból lehet négyzetgyököt vonni.

8. Legyen $z = 1 + 3i$ és $u = 2 - i$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:
a) $z\bar{z}$ b) $u/\bar{u}$ c) $|z-u|$ d) $|2z - zu|$ e) $|u/z\bar{u}^3|$.

9. Mi a mértani helye azokhoz a z komplex számokhoz tartozó pontoknak, amelyekre:
a) $|z - 5 + i| = 2$; b) $z + \bar{z} < 4$; c) $|z - i| = |z + i|$; d) $2z + 5 = 2\bar{z}$;
e) $\left|\dfrac{z-3+4i}{z-i}\right| \geq 1$; f) $|z| = 3iz$; g) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0$; h) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0$?

10. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:
a) $z^2 = -12$;
b) $z^2 + 3z + 4 = 0$;
c) $z^2 = i$;
d) $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$.

11. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében, és ábrázoljuk a megoldásokat a komplex számsíkon.
a) $x^3 - 1 = 0$ b) $x^4 - 1 = 0$ c) $x^4 + 1 = 0$ d) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$
Az d) egyenletnél osszunk le x^2-tel, és vezessük be az $u = x + (1/x)$ helyettesítést.

12. Mi a geometriai jelentése annak, hogy egy z komplex számot megszorzunk i-vel? Hát annak, ha $(1+i)$-vel szorzunk? És ha vesszük a z konjugáltjának a reciprokát ($z \neq 0$-ra)?

13. Egy $ABCD$ konvex négyszög oldalaira kifelé négyzeteket szerkesztünk. Jelölje ezek középpontját sorra E, F, G és H. Igazoljuk, hogy EG merőleges FH-ra.

14. Számítsuk ki a következő összegeket:
a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots$
b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots$

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy az $\{\, f(x) = ax + b \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \}$ függvények csoportot alkotnak a kompozícióval mint szorzással.

Hf2. Mi a mértani helye a komplex számsíkon azoknak a z számoknak, amelyek kielégítik a $|z| = iz$ egyenletet?

Hf3. Oldjuk meg a komplex számok körében a $\dfrac{z^2 + 5i}{z^2 - i} = 2 - i$ egyenletet!