

1. Osszuk el maradékosan az $x^5 - 3x^4 + 2x + 1$ polinomot
 - a) $(x^2 + 2x - 3)$ -mal;
 - b) $(x - 2)$ -vel;
 - c) $(x^2 - 4)$ -gyel.
2. Milyen maradékot ad a $100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \dots + 2x^2 + x$ polinom az $x^2 - 1$, illetve az $x^2 + 1$ polinommal osztva?
3. Igaz-e, hogy ha
 - a) $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$, és $g(x) \mid f(x)$ igaz $\mathbb{R}[x]$ -ben, akkor $\mathbb{Q}[x]$ -ben is igaz?
 - b) $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$, és $g(x) \mid f(x)$ igaz $\mathbb{Q}[x]$ -ben, akkor $\mathbb{Z}[x]$ -ben is igaz?
4. Tegyük fel, hogy $f(x)g(x) = h(x)$, ahol $f(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, továbbá, hogy $f(x)$ főegyütthatója 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
5. Keressük meg a $2x^6 + x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$ polinom összes gyökét. Bontsuk föl a polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$ -ben, $\mathbb{R}[x]$ -ben, illetve $\mathbb{Q}[x]$ -ben.
6. Keressük meg a következő polinomok összes gyökét \mathbb{C} -ben, és írjuk fel a polinomokat \mathbb{C} fölött lineáris tényezők szorzataként!
 - a) $x^6 - x^4 + 2$;
 - b) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
7. Adjuk meg a következő polinomok gyöktényezős alakját:
 - a) $x^3 - 1$;
 - b) $x^2 + x + 1$;
 - c) $x^4 + 1$;
 - d) $x^n - 1$;
 - e) $x^n + 1$;
8. Van-e olyan polinom $\mathbb{Q}[x]$ -ben, amelynek nem minden együtthatója egész, mégis egész értéket vesz föl minden egész helyen?
9.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy K test fölötti legföljebb 3-adjokú polinomnak nincs gyöke K -ban, akkor az irreducibilis.
 - b) Adjunk meg olyan $\mathbb{Z}[x]$ -beli 3-adjokú polinomot, amelynek nincs gyöke \mathbb{Z} -ben, de nem irreducibilis.
 - c) Adjunk meg olyan $\mathbb{R}[x]$ -beli 4-edfokú polinomot, amelynek nincs gyöke \mathbb{R} -ben, de nem irreducibilis.
- Hf1.** Mi lehet a rendje a $-\varepsilon^2$ komplex számnak, ha ε (nem feltétlenül primitív) 10-edik egységgyök?
- Hf2.** Számítsuk ki az $x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1$ és $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2$ polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmussal.
- Hf3.** Keressük meg a $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4$ polinom összes gyökét \mathbb{C} -ben, és írjuk fel a polinomot \mathbb{C} fölött lineáris tényezők szorzataként!