1. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ függvény polinomfüggvény!

2. Az $\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, \mathbf{0}, \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{k}$ vektorokból hány különböző bázisát tudjuk $\mathbb{R}^3$-nek kiválasztani? Mindegyikhez írjuk föl a többi vektort a báziselemek lineáris kombinációjaként!

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok közül $\mathbf{v}_1$ az egyetlen, amelyik előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

4. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineárisan független vektorok egy valós vektortérben. Függetlenek-e a következő vektorok?

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_n$
b) $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}-\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n-\mathbf{v}_1$
c) $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n+\mathbf{v}_1$

5. Legyenek az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ és $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ vektorok lineárisan függetlenek $\mathbb{R}^3$-ben. Határozzuk meg azokat a D pontokat a síkon, amelyekre igaz, hogy a $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ vektorra $\mathbf{a}-\mathbf{d}$, $\mathbf{b}-\mathbf{d}$ és $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ lineárisan függetlenek!

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ lineárisan független, de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ és $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ lineárisan összefüggők, akkor $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ esetén $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ is lineárisan független!

7. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?

a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
b) invertálható 2×2-es valós mátrixok;
c) a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;
d) azok a legföljebb 4-edfokú valós polinomok, amelyeknek gyöke a -1;
e) a valós számpárok az $(a,b) \oplus (c,d) = (a+d, b+c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;
f) $\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve.

Hf1. Legyenek a, b és c az x^3+3x-2 polinom gyökei. Adjunk meg egy olyan polinomot, amelynek gyökei ab, ac és bc.

Hf2. Keressünk $\mathbb{Z}_5$ fölött olyan polinomot, amelyre $f(0)=f(2)=f(3)=1$, $f(1)=3$ és $f(4)=0$.

Hf3. Tegyük fel, hogy egy vektortérben $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ független, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ összefüggő, és $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ is összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy $\{\mathbf{a}, \mathbf{d}\}$ is összefüggő.

A házi feladatok beadási ideje a zh utáni hét szerdája, október 27.