1. Fejezzük ki az $(1,3)$ vektort az $\mathbb{R}^2$ standard $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ bázisának, illetve a $\{(2,1),(1,-1)\}$ bázis elemeinek lineáris kombinációjaként.

2. Legyen V egy $\mathbb{Z}_p$ fölötti 2-dimenziós vektortér.
a) Hány eleme van V-nek?
b) Hány egydimenziós altere van V-nek?
c) Egy adott $W \leq V$ egydimenziós altérhez hány olyan U altér van, amelyre $V = W \oplus U$?.

3. Lineárisak, injektívek, szürjektívek-e az alábbi, vektortérből vektortérbe menő leképezések?
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (y,x,2z)$.
b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$.
c) $f(p(x)) = p(5)$, ahol f a legföljebb másodfokú valós polinomok teréből képez $\mathbb{R}$-be.
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (1+x,y)$.
e) A z tengely körüli $90°$-os forgatás $\mathbb{R}^3$-ben.
f) Az xy-síkra való, $(1,1,1)$ irányú vetítés, ha ezt $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, illetve ha $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ leképezésnek vesszük.
g) Az a leképezés a legföljebb másodfokú valós polinomok teréből $\mathbb{R}$-be, amely minden polinomhoz a főegyütthatóját rendeli.

4. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (1,1,-1)$, illetve a $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (1,1,-1)$ lineáris leképezések képterét és magterét. Hány dimenziós a képtér és a magtér?

5. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A + A,\quad A + B,\quad AB,\quad AC,\quad AC + 2C,\quad AD - 3D,\quad D^2,\quad CC^T,\quad BC,\quad CB.$$

6. Számítsuk ki a következő mátrixok 101-edik hatványát:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$;

7. Igazak-e minden $n \times n$-es $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mátrixra az alábbi egyenlőségek?
a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$;
b) $(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I}^2$;
c) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$;
d) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$.

8. A megadott $n \times n$-es A mátrixokra mi a hatása az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ leképezésnek, ahol $\mathbf{x}$ n-dimenziós oszlopvektort (azaz $n \times 1$-es mátrixot) jelöl? Hogyan hatnak ezek a mátrixok az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,... vektorokon? Melyek azok a mátrixok, amelyekkel való balszorzás az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ egység oszlopvektorokat egymás között permutálja?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Adjunk meg olyan mátrixot, amely az $\mathbb{R}^3$ standard bázisán úgy hat, hogy mindegyik bázisvektorhoz (beleértve az elsőt is) hozzáadja az elsőt.

10. Keressünk olyan A, B, C valós négyzetes mátrixokat, melyekre:
a) $AB = 0$, és $BA \neq 0$; c) $C^2 = 0$, és $C \neq 0$;

11. Adjuk meg a 3. feladatban szereplő lineáris leképzések standard mátrixát.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{F}$ független rendszer, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cup \{\mathbf{v}\}$ pedig generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $\mathcal{F}$ vagy $\mathcal{F}_1$ bázisa V-nek.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^4$-ben az $\{(x,y,z,u) \mid x + y + z + u = 0\}$ halmaz altér. Hány dimenziós ez az altér? Adjuk meg egy bázisát!

Hf3. Keressünk olyan A mátrixot, amelyre $A^2 = I$, de $A \neq \pm I$.