1. Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban.

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x,y,z)) = (x+y, x+y)$;
b) a 2×2-es valós mátrixokon a mellékátlóra való tükrözés;
c) a komplex konjugálás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
d) egy adott $a+bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
e) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

2. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt az $\mathbb{R}^3$ vektortéren, amelyre

a) $0 \neq \operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Im}\varphi$;
b) $\operatorname{Ker}\varphi$ 1 dimenziós, és $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;
c) $\varphi^3 = 0$, de $\varphi^2 \neq 0$.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

a)
$$\begin{aligned} x+2y-z&=2\\ 3x-y+2z&=7\\ x-z&=-2\\ 2x+y+z&=7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x+y+z&=4\\ -x+y-z&=2\\ 2x+y+2z&=1\\ 4x+4y+4z&=1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ y+z+u&=2\\ z+u+x&=-1\\ u+x+y&=4 \end{aligned}$$

4. Számítsuk ki az $f : (x,y,z) \longmapsto (x+y-2z, x+z, 2x+y-z, -x-z)$ leképezés mátrixának a rangját! Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!

5. Hány megoldása van azoknak az egyenletrendszereknek a valós számok körében, amelyeknek a bővített mátrixa a következő redukált lépcsős alakra hozható? Amelyiknek több megoldása is van, annak adjuk meg legalább három különböző megoldását!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&2&1\\ 0&1&1&1\\ 0&0&0&0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&2\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&-1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&0&1&0\\ 0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0&1&0&2\\ 0&0&1&3\\ 0&0&0&0 \end{array}\right]$$

6. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk is meg a megoldásokat ezekben az esetekben!

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=4\\ x+2y-z&=-1\\ x-y+2z&=a\\ x+by+z&=3 \end{aligned}$$

7. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

a) Ha $k \leq n$, akkor az egyenletrendszernek létezik megoldása.
b) Ha $k > n$, akkor az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.
c) Ha $k < n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.
d) Ha $k > n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak egy megoldása van.
e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.

Hf1. Adjuk meg egy (x_0, y_0, z_0) pont képét az $x+y-2z=0$ síkra való tükrözésnél. Határozzuk meg ennek a tükrözésnek mint az $\mathbb{R}^3$ vektortér lineáris transzformációjának a standard mátrixát!

Hf2. Adjunk meg olyan φ lineáris transzformációt az $\mathbb{R}^3$ vektortéren, amelyre $\operatorname{Im}\varphi$ 2 dimenziós, és φ az $\operatorname{Im}\varphi$ minden vektorát önmagába viszi.

Hf3. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-y+z, y-x)$ lineáris transzformáció képterének és magterének egy-egy bázisát!