1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Adjuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ lineáris transzformációra

a) $\operatorname{Ker} f$ és $\operatorname{Im} f$ egy-egy bázisát;

b) $(1,1,1)$ összes ősképét;

c) az $(1,0,0)$-hoz legközelebbi olyan $\mathbf{v}$ vektort (azaz $|\mathbf{v} - (1,0,0)|$ legyen minimális), amely benne van $\operatorname{Im} f$-ben.

2. Számítsuk ki a következő (valós) mátrixok rangját (ahol paraméter van, ott annak függvényében)! Adjunk meg annyi független sort, és annyi független oszlopot, mint amennyi a mátrix rangja!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

3. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát és, ha van, a mátrix inverzét is:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Adjuk meg annak az f lineáris transzformációnak a mátrixát $\mathbb{R}^3$ standard bázisában, amelyre $f(1,0,2) = (2,1,-1)$, $f(3,1,0) = (1,0,0)$ és $f(2,1,-1) = (3,1,3)$.

5. Hogyan változik egy $n \times n$-es mátrix determinánsa, ha tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére? Hát ha elforgatjuk 90, 180, ill. 270 fokkal?

6. Mi egy $n \times n$-es mátrix ($n \geq 3$) determinánsának az értéke, ha a mátrix minden sora számtani sorozat?

7. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$

8. Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?

9. a) Mennyit változhat egy mátrix rangja egy elem megváltoztatásával?

b) Bizonyítsuk be, hogy egy n rangú $n \times n$-es mátrix rangját egyetlen alkalmas elemének a megváltoztatásával csökkeneteni lehet, de egy $(n-1) \times (n-1)$ rangút nem feltétlenül.

c)* Legrosszabb esetben hány elemet kell megváltoztatni egy $n \times n$-es mátrixban, hogy 1 rangú mátrix legyen belőle?

Hf1. Oldjuk meg az $AX = B$ mátrixegyenletet, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Hf2. Keressünk olyan vektort az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, amely nem lineáris kombinációja a $(1,2,-1,0)$, $(1,1,1,1)$, $(0,1,-1,3)$ vektoroknak. Bizonyítsuk be, hogy a négy vektor együtt bázisát alkotja $\mathbb{R}^4$-nek.

Hf3. Bizonyítsuk be, hogy egy $n \times n$ mátrixnak legföljebb n elemét alkalmasan megváltoztatva el tudjuk érni, hogy a mátrix n rangú legyen, de ennél kevesebb változtatás nem mindig elég.