1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi mátrix determinánsa $\prod_{i>j}(a_i - a_j)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ & & & \dots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2. A Cramer-szabály segítségével számítsuk ki y értékét, ha x, y és z kielégítik a következő egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

3. Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisban, illetve bázispárban:

a) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$;

b) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$;

c) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$;

d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, amelyre $\varphi(1,2,1) = (0,2,1)$, $\varphi(1,1,1) = (1,0,0)$, $\varphi(1,0,0) = (-1,0,0)$, a standard bázisban;

e) $p(x) \mapsto p'(x)$ a legföljebb másodfokú valós polinomok terén, a standard $\{1, x, x^2\}$ bázisban;

f) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y) = (x+y, y, x)$, $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(2,0)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,2,1),(-1,1,0),(0,1,1)\}$ bázispárban;

g) Az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard bázisban.

4. Keressük meg az alábbi mátrixok összes (komplex) sajátértékét és sajátvektorát! Írjuk le az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ és $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$ leképezések hatását $\mathbb{R}^2$-ben!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Mutassuk meg, hogy bármely 3×3-as valós mátrixnak van valós sajátvektora.

6. Melyek igazak egy A négyzetes mátrixra? Amelyik igaz, azt bizonyítsuk, amelyik nem, arra adjunk ellenpéldát.

a) $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek;

b) $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak;

7. Legyen A 2×2-es valós mátrix. Tegyük föl, hogy az alábbi négy állítás közül pontosan egy nem igaz. Melyik lehet az?

a) A rangja legföljebb 1.

b) A-nak van sajátvektora.

c) $A^2 = A$.

d) A 0 sajátértéke A-nak.

8. A mátrix felírása nélkül állapítsuk meg, mik a (valós) sajátértékei és sajátvektorai a következő lineáris transzformációknak:

a) $\mathbb{R}^3$ tükrözése az $(1,2,2)$ vektorra merőleges, az origón átmenő síkra;

b) $\mathbb{R}^3$ $90°$-os elforgatása az x tengely körül;

c) $\mathbb{R}^2$ merőleges vetítése az $y = 2x$ egyenesre;

d) az $(1,0,2)$ vektorral való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ben;

9. Keressük meg azt a 3×3-as mátrixot, amelynek sajátértékei 1, 2 és 3, és ezekhez tartozó sajátvektorok rendre $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)$, $(0,1,-1)$ és $(1,0,2)$.

Hf1. Számítsuk ki annak az $n \times n$-es determinánsnak az értékét, amelynek főátlójában csupa 1-es, a mellékátló a főátlón kívüli részén csupa 2-es, mindenhol máshol pedig 0 áll.

Hf2. Hány olyan 1 rangú 3×3-as valós mátrix van, amelynek minden eleme 0 vagy 1?

Hf3. Adjuk meg a $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \times (1,2,3)$ transzformációt az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában, illetve a $\mathcal{B} = \{(1,2,3),(2,-1,0),(3,6,-5)\}$ bázisban.