**1.** Melyik mátrixok diagonalizálhatók $\mathbb{C}$ fölött a következők közül? $A^n = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

**2.** Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-normálalakja?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

**3.** Maximum hány olyan páronként nem hasonló (komplex) mátrixot lehet megadni, amelynek a karakterisztikus polinomja $(x-1)^3 \cdot (x-2)^2$?

**4.** Van-e olyan komplex elemű mátrix, amelynek a karakterisztikus és minimálpolinomja a következő?

a) $p_1(x) = (x-1)^2(x-2)^3$, $\quad m_1(x) = (x-1)(x-2)^2$;
b) $p_2(x) = x^6 + x + 1$, $\quad m_2(x) = x^2 + x + 1$;
c) $p_3(x) = (x-1)^2(x-2)^3(x-5)$, $\quad m_3(x) = (x-1)^2(x-2)^2$;
d) $p_4(x) = (x^3 - x - 4)^2$, $\quad m_4(x) = (x^3 - x - 4)$.

**5.** Van-e olyan $3\times 3$-as mátrix $\mathbb{Q}$ fölött, amelynek minimálpolinomja

a) $x^2 - 2$;
b) $x^2 + x$?

**6.** Tegyük föl, hogy egy $A$ $\mathbb{C}$ fölötti mátrixra teljesül az $A^m = I$ egyenlőség valamilyen $m \geq 1$ esetén. Igazoljuk, hogy $A$ diagonalizálható!

**7.** Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók az $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**8.** Legyen $V = \mathbb{R}^5$ a szokásos skalárszorzattal, és $U$ azon vektorok halmaza, amelyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével.

a) Adjunk meg $U$-ban egy ortonormált bázist.
b) Határozzuk meg $U^\perp$ elemeit.
c) Írjuk fel az (1,0,0,0,0) vektort egy $U$-beli és egy $U^\perp$-beli vektor összegeként.

**9.** Bizonyítsuk be tetszőleges euklideszi térben az alábbi állításokat. Mely közismert geometriai tételek általánosításáról van szó?

a) $\mathbf{x} \perp \mathbf{z} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}+\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2$; $\quad$ b) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{z}\| \Leftrightarrow \mathbf{x}+\mathbf{z} \perp \mathbf{x}-\mathbf{z}$;
c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{z}\|^2$.

**Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy ha $\lambda^2$ sajátértéke $A^2$-nek, akkor $\lambda$ vagy $-\lambda$ sajátértéke $A$-nak.

**Hf2.** Keressük meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x - 4y - 2z, 4y + z, -4y)$ lineáris transzformáció sajátértékeit, és határozzuk meg a sajátvektorait a sajátalterek egy-egy bázisának megadásával!

**Hf3.** Hozzuk diagonális alakra a $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot, és számítsuk ki ennek segítségével az $A^n$ hatványt.