1. Egy egység élű kocka alaplapja az $ABCD$ négyzet, fedőlapja $A'B'C'D'$, ahol az egyes csúcsok az alapon azonos betűvel jelzett csúcsok fölött vannak. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:
$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{B'C'}|$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'}$ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC'}$

2. Mely $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra teljesülnek az alábbi összefüggések?
a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;
b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;
c) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

3. Legyen O az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ csúcspontok által meghatározott szabályos n-szög középpontja. Határozzuk meg az $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ vektorösszeget!

4. Tegyük föl, hogy a C pont $m : n$ arányban osztja két részre az AB szakaszt. Jelöljön O egy tetszőleges pontot. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OC}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok, valamint m és n segítségével!

5. Legyen F az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja, H pedig a BC oldal C-hez közelebbi harmadolópontja. Milyen arányban osztja egymást a CF és az AH szakasz?

6. a) Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ és $\mathbf{b} = (2, 1, -1)$ vektorok szögét!
b) Adjuk meg az $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ vektor merőleges vetületét a $\mathbf{b} = (2, -1, 2)$ vektorra!

7. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nulla vektorok szögét, ha tudjuk, hogy $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a} - \mathbf{b}$-re, továbbá $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{b}$-re!

8. Ha $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re, akkor mivel egyenlő az $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ vektor?

9. Legyen $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. Bizonyítsuk be, hogy
a) P akkor és csak akkor van rajta a P_0-t tartalmazó, az $\mathbf{n} = (a, b, c)$ vektorra merőleges síkon, ha $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$;
b) P akkor és csak akkor van rajta a P_0-on átmenő, a $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorral párhuzamos egyenesen, ha van olyan $t \in \mathbb{R}$, amelyre $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.
Írjuk fel a kapott egyenleteket koordinátákkal is!

10. Fejezzük ki vektorműveletekkel egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{nr} = \mathbf{0}$ síkra vonatkozó tükörképét, illetve egy $\mathbf{b}$ irányvektorú, origón átmenő egyenes körüli $90°$-os elforgatottját!

11. Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes félcsoportban
a) ha a és b invertálható, akkor ab és ba is invertálható;
b) ha ab és ba invertálható, akkor a és b is invertálható!
c) Egy halmaz önmagába menő leképezései egységelemes félcsoportot alkotnak a kompozícióra nézve. Lássuk be, hogy végtelen halmaz esetén van ebben olyan a és b elem, amelyre ab invertálható, de a és b nem!

12. Gyűrűt, illetve testet alkot-e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a komponensenkénti műveletekre nézve (azaz: $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ és $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$)? Van-e egységelem, nullelem?

13. Lássuk be, hogy tetszőleges gyűrűben $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ minden a elemre, továbbá $(a(-b) = (-a)b = -(ab)$ minden a, b-re!

14. a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}$-nak nincs olyan valódi részhalmaza, amely az eredeti műveletekkel testet alkot!
b) Bizonyítsuk be, hogy a legkisebb olyan résztest $\mathbb{R}$-ben, amely tartalmazza a $\sqrt{2}$ számot, az $\{\, a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\}$.

Hf1. Legyen az ABC háromszögre $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$. Írjuk fel a háromszög C-ből kiinduló súlyvonalát, magasságát és szögfelezőjét mint vektorokat az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok és vektorműveletek (beleértve az abszolútértéket is) segítségével!

Hf2. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hossza 1 és 2, a $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektoré pedig 2. Határozzuk meg $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögét!

Hf3. Tekintsük egy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra az $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$, $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$, … sorozatot. Hányadik lehet az első $\mathbf{0}$ vektor a sorozatban. Ha ilyen nincs, hány különböző iránya van a sorozatban szereplő vektoroknak?