

1. Testet alkotnak-e az  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  elemei, ha az összeadás  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ , a szorzás pedig
- $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ , illetve
  - $(a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$ ?
2. Adjuk meg az alábbi komplex számok kanonikus (algebrai) alakját:
- $z = (3 - 4i)(7 + 8i)$ ;
  - $z = \frac{3 - 4i}{2 - i}$ ;
  - $z = i^{87}$ ;
  - $z = (1 + i)^9$ .
3. a) Számítsuk ki a  $16 - 30i$  komplex szám négyzetgyökeit.  
b) Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok körében minden számból lehet négyzetgyököt vonni.
4. Legyen  $z = 1 + 3i$  és  $u = 2 - i$ . Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:
- $z\bar{z}$
  - $u/\bar{u}$
  - $|z - u|$
  - $|2z - zu|$
  - $|u/z\bar{u}^3|$ .
5. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő  $z$  komplex számokra:
- $|z - 5 + i| = 2$
  - $|z - i| = |z + i|$
  - $|z| = 3iz$
  - $z + \bar{z} < 4$
  - $2z + 5 = 2\bar{z}$
  - $\left| \frac{z - 3 + 4i}{z - i} \right| \geq 1$
6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:
- $z^2 = -12$ ;
  - $z^2 + 3z + 4 = 0$ ;
  - $z^2 = i$ ;
  - $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$ .
7. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében, és ábrázoljuk a megoldásokat a komplex számsíkon.
- $x^3 - 1 = 0$
  - $x^4 - 1 = 0$
  - $x^4 + 1 = 0$
  - $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$
- Az d) egyenletnél osszuk le  $x^2$ -tel, és vezessük be az  $u = x + (1/x)$  helyettesítést.
8. Mi a geometriai jelentése annak, hogy egy  $z$  komplex számot megszorunk  $i$ -vel? Hát annak, ha  $(1 + i)$ -vel szorzunk? És ha vesszük a  $z$  konjugáltjának a reciprokát ( $z \neq 0$ -ra)?
9. Hozzuk trigonometrikus alakra az alábbi komplex számokat:
- $1 + i$ ;
  - $-8$ ;
  - $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ;
  - $1 - i \operatorname{tg} \alpha$ ;
  - $\sin 12^\circ - i \cos 12^\circ$ .
10. Számítsuk ki
- a  $(-\sqrt{3} + i)^{-9}$  komplex szám értékét, és hozzuk az eredményt algebrai alakra;
  - $-243i$  összes ötödik gyökét (trigonometrikus alakban);
  - a  $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$  egyenlet összes megoldását;
  - a  $\bar{z} = z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) egyenlet összes megoldását.
11. Bizonyítsuk be, hogy egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójának különböző csúcsainál vett harmadoló, illetve negyedelő pontja által alkotott szakasz  $45^\circ$ -os szög alatt látszik a háromszög átellenes csúcsából!
12. Adjuk meg  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényként (a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) az alábbi síktranszformációkat:
- origo körüli  $\alpha$  szögű forgatás;
  - $1 + i$  körüli  $60^\circ$ -os forgatás
  - Az  $x$ , illetve az  $y$  tengelyre való tükrözés;
- Hf1.** Határozzuk meg azon  $z$  számok mértani helyét a komplex számsíkon, amelyekre  $|z| = iz$ .
- Hf2.** Adjuk meg az alábbi egyenlet összes megoldását:
- $$\frac{2z}{1-i} + \frac{2}{z-1} = -1 + 2i.$$