

1. a) Tetszőleges  $n$  természetes számra számítsuk ki  $(1+i)^n$  értékét.  
b) Határozzuk meg az  $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$  összeg értékét.  
c) Fejezzük ki  $\cos(7x)$ -et  $\cos x$  és  $\sin x$  segítségével.
  2. Bizonyítsuk be, hogy minden  $n$ -edik egységgyök primitív  $d$ -edik egységgyök valamilyen  $d \mid n$ -re.
  3. Ha  $\varepsilon$   $n$ -edik primitív egységgyök,  $\varepsilon^k$ ,  $\bar{\varepsilon}$  és  $-\varepsilon$  hányadik primitív egységgyökök?
  4. Számítsuk ki az  $n$ -edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét!
  5. Oldjuk meg az  $x^3 + 6x + 2 = 0$  egyenletet a Cardano-képlet segítségével!
  6. Osszuk el maradékosan az  $x^5 - 3x^4 + 2x + 1$  polinomot
    - a)  $(x^2 + 2x - 3)$ -mal;
    - b)  $(x - 2)$ -vel;
    - c)  $(x^2 - 4)$ -gyel.
  7. Milyen maradékot ad a  $100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \dots + 2x^2 + x$  polinom az  $x + 1$ ,  $x^2 - 1$ , illetve az  $x^2 + 1$  polinommal osztva?
  8. Tegyük fel, hogy  $f(x)g(x) = h(x)$ , ahol  $f(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$  és  $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ , továbbá, hogy  $f(x)$  főegyütthatója 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ .
  9. (Racionális gyökteszt) Lássuk be, hogy ha az  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$  polinomnak egy  $\frac{p}{q}$  racionális szám gyöke (ahol  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $(p, q) = 1$ ), akkor  $p \mid a_0$  és  $q \mid a_n$ .
  10. Keressük meg a következő polinomok összes gyökét  $\mathbb{C}$ -ben, és adjuk meg a polinomok gyöktényezős alakját!
    - a)  $x^6 - x^4 + 2$
    - b)  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
    - c)  $x^3 - 1$
    - d)  $x^2 + x + 1$
    - e)  $x^n + 1$
- Hf1.** Számítsuk ki a  $-16\sqrt{3} + 16i$  komplex szám ötödik gyökeit. Legalább egyet írjunk algebrai alakba.
- Hf2.** Mekkora szöget zárhat be egymással két egységgyök, ha az összegük is egységnyi hosszúságú? Mutassuk meg, hogy ekkor az összeg is egységgyök!
- Hf3.** Keressük meg a  $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4$  összes gyökét  $\mathbb{C}$ -ben, és bontsuk föl a polinomot gyöktényezőik szorzatára.