1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy K test fölötti legföljebb 3-adfokú polinomnak nincs gyöke K-ban, akkor az irreducibilis.
b) Adjunk meg olyan $\mathbb{Z}[x]$-beli 3-adfokú polinomot, amelynek nincs gyöke $\mathbb{Z}$-ben, de nem irreducibilis.
c) Adjunk meg olyan $\mathbb{R}[x]$-beli 4-edfokú polinomot, amelynek nincs gyöke $\mathbb{R}$-ben, de nem irreducibilis.

2. Melyek irreducibilisek $\mathbb{Q}[x]$-ben az alábbi polinomok közül?
a) x^2+x+1 b) $3x^5-6x^3+2x-2$ c) x^4+4 d) x^5+4

3. Keressük meg a $2x^6+x^5-5x^4-2x^3-4x^2-3x+3$ polinom összes gyökét. Bontsuk föl a polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Q}[x]$-ben.

4. Számítsuk ki euklideszi algoritmussal a
a) 348 és 493 számok legnagyobb közös osztóját;
b) az x^6-1 és $x^5-x^4+2x^3+1$ polinomok legnagyobb közös osztóját!

5. Keressük meg az összes másodfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_2$-ben és $\mathbb{Z}_3$-ban!

6. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}[x]$-ben a $\mathbb{Z}_2$ és/vagy $\mathbb{Z}_3$ fölötti felbonthatóságának vizsgálatával!
a) x^4-5x^3+2x+1; b) x^4-2x^3+2x+1; c) $3x^5+x^2-2x+3$; d) x^4+x^3+x+2.

7. Legyen $f(x)=x^4-x^2+1$.
a) Bontsuk fel $f(x)$-et irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ fölött!
b) Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött!
c) Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ reducibilis $GF(2)$, $GF(3)$ és $GF(5)$ fölött!
d)* Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ reducibilis $GF(p)$ fölött minden p prímre.

8. Van-e olyan polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, amelynek nem minden együtthatója egész, mégis egész értéket vesz föl minden egész helyen?

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$, és $a,b\in\mathbb{Z}$, akkor $a-b \mid f(a)-f(b)$.

10. Van-e olyan egész együtthatós f polinom, amely az $1,2,-1$ helyeken az alábbi értékeket veszi föl?
a) $f(1)=3$, $f(2)=10$, és $f(-1)=7$;
b) $f(1)=3$, $f(2)=10$, és $f(-1)=2$.

11. Tegyük föl, hogy az $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ polinom 4-edfokú, 1 főegyütthatós, és $f(1)=10$, $f(2)=20$, $f(3)=30$. Mennyi lehet $f(0)+f(4)$?

12. Legyenek a, b és c az $2x^3-x^2+3x+6$ polinom három gyöke $\mathbb{C}$-ben. Határozzuk meg az abc, $a^3+b^3+c^3$ és $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$ kifejezések értékét.

13. Az x^3-2x^2+5x+1 polinom gyökei α, β és γ. Adjuk meg azt a harmadfokú, 1 főegyütthatós polinomot, amelynek gyökei $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ és $\beta+\gamma$.

Hf1. Bontsuk föl az $x^5+6x^3+2x^2-4x-2$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan harmadfokú $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ polinom, amelyre $f(-1)=4$, $f(0)=1$, $f(1)=2$ és $f(2)=7$.