1. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?

a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
b) invertálható 2×2-es valós mátrixok;
c) a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;
d) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;
e) $\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok közül $\mathbf{v}_1$ az egyetlen, amelyik előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha legalább egy dimenziós valós vektortérben nincs 19 elemű generátorrendszer, akkor van benne 20 elemű független rendszer!

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ lineárisan független, de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$ és $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ lineárisan összefüggők, akkor $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ esetén $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ is lineárisan független!

5. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A + A, \quad A + B, \quad AB, \quad AC, \quad AC + 2C, \quad AD - 3D, \quad D^2, \quad BC, \quad CB, \quad B + C^T$$

6. Tetszőleges $n > 1$-re adjunk meg olyan $n \times n$-es A és B valós mátrixokat, melyekre $AB = 0$, és $BA \neq 0$.

7. Keressünk olyan A, B, C, D valós négyzetes mátrixokat, melyekre:

a) $A^2 = I$ és $A \neq \pm I$; b) $B^2 = 0$ és $B \neq 0$; c) $D^2 = D$ és $D \neq 0, I$.

8. Mi történik egy $n \times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

9. Igazak-e minden $n \times n$-es $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mátrixra az alábbi egyenlőségek?

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$; b) $(\mathbf{A} + \mathbf{I}_n)(\mathbf{A} - \mathbf{I}_n) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I}_n^2$;
c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$; d) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$.

Hf1. Legyenek a, b és c az $x^3 + 2x^2 - 5$ polinom gyökei. Számítsuk ki $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ értékét!

Hf2. Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ban végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely három lineárisan független!

Hf3. Össze lehet-e szorozni valamilyen sorrendben a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokat, hogy a szorzat ne a nulla mátrix legyen?