1. Hány megoldása van azoknak az egyenletrendszereknek a valós számok körében, amelyeknek a bővített mátrixa a következő redukált lépcsős alakra hozható? Amelyiknek több megoldása is van, annak adjuk meg legalább három különböző megoldását!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

a) $$\begin{aligned} x+2y-z&=2 \\ 3x-y+2z&=7 \\ x-z&=-2 \\ 2x+y+z&=7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+y+z&=4 \\ -x+y-z&=2 \\ 2x+y+2z&=1 \\ 4x+4y+4z&=1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ -x+y-z&=1 \\ 2x+y+2z&=1 \\ 4x+4y+4z&=4 \end{aligned}$$

3. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk is meg a megoldásokat ezekben az esetekben!

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=4 \\ x+2y-z&=-1 \\ x-y+2z&=a \\ x+by+z&=3 \end{aligned}$$

4. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

a) Ha $k \leq n$, akkor az egyenletrendszernek létezik megoldása.
b) Ha $k > n$, akkor az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.
c) Ha $k < n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.
d) Ha $k > n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak egy megoldása van.
e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.

5. Állapítsuk meg, függetlenek-e a megadott vektorhalmazok $\mathbb{R}^n$-ben. Ha nem, keressünk köztük maximális számú független vektort, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként! Benne van-e a külön megadott vektor a vektorhalmaz által generált altérben?

a) $\{(1,2,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,-2,-1),(0,1,2,1)\}$, $\mathbf{v}=(-1,0,1,3)$
b) $\{(1,2,1),(0,1,3),(1,-1,0)\}$, $\mathbf{v}=(1,1,1)$

6. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ lineárisan független vektorok egy vektortérben. Függetlenek-e a következő vektorok? Ha nem függetlenek, hány dimenziós alteret generálnak?

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_n$
b) $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}-\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n-\mathbf{v}_1$
c) $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n+\mathbf{v}_1$

7. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét, ha van! Mi a determinánsa a megadott mátrixoknak?

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket, ha lehet! A,B,C,D a 7. feladatban szereplő mátrixok.

a) $CX=D$ b) $BX=C$ c) $XB=M$, ahol $M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ d) $XB=AM$

Hf1. Adjunk meg egy olyan három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, amelynek nincs megoldása, de bármely két egyenletnek van közös megoldása.

Hf2. Oldjuk meg az $AX=B$ mátrixegyenletet, ahol $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Hf3. Keressünk olyan vektort az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, amely az $(1,2,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,-1,3)$ vektorokkal együtt bázist alkot.