1. Hogyan változik egy $n \times n$-es mátrix determinánsa, ha tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére? Hát ha elforgatjuk 90, 180, ill. 270 fokkal?

2. Mi egy $n \times n$-es mátrix ($n \geq 3$) determinánsának az értéke, ha a mátrix minden sora számtani sorozat?

3. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$

4. Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?

5. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi mátrix determinánsa $\prod\limits_{i>j}(a_i - a_j)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ & & & \dots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

6. A Cramer-szabály segítségével számítsuk ki y értékét, ha x, y és z kielégítik a következő egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-ben n vektor akkor és csak akkor alkot bázist, ha az n vektorból mint oszlopokból alkotott mátrix determinánsa nem 0.

8. Számítsuk ki a következő (valós) mátrixok rangját (ahol paraméter van, ott annak függvényében)! Adjunk meg annyi független sort, és annyi független oszlopot, mint amennyi a mátrix rangja!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

9. Legyen $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,2)\}$ az $\mathbb{R}^3$ vektortér egy bázisa. Adjuk meg a $(3,2,1)$ vektor koordinátáit a $\mathcal{B}$ bázisban, és határozzuk meg azt az elemét $\mathbb{R}^3$-nek, amelynek koordinátavektora a $\mathcal{B}$ bázisban $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Hf1. Benne van-e a $\mathbf{v} = (1,1,0)$ vektor az $\mathbf{a} = (1,-1,2)$, $\mathbf{b} = (3,1,1)$, $\mathbf{c} = (1,3,-3)$ vektorok által kifeszített altérben? Ha igen, fejezzük ki $\mathbf{v}$-t az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha nem, keressünk olyan $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ vektort, amely $\mathbf{v}$-től minél kevesebb komponensben tér el.

Hf2. Számítsuk ki annak az $n \times n$-es determinánsnak az értékét, amelynek főátlójában csupa 1-es, a mellékátló főátlón kívüli részén csupa 2-es, mindenhol máshol pedig 0 áll.

Hf3. Mik a lehetséges értékei annak a 4×4-es determinánsnak, amelynek csak 0 és 1 elemei vannak, és ezek közül legföljebb öt 1-es?