1. Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.

a) az $\mathbb{R}^2$ sík tükrözése az $x = 2$ egyenesre;
b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x, y, z)) = (x + y, x + y)$;
c) az a leképezés, amely minden $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz a hosszát rendeli;
d) a 2×2-es valós mátrixokon a mellékátlóra való tükrözés;
e) a komplex konjugálás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
f) egy adott $a + bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
g) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

2. Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisban, illetve bázispárban:

a) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$;
b) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$;
c) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}$;
d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, amelyre $\varphi(1, 2, 1) = (0, 2, 1)$, $\varphi(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $\varphi(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$, a standard bázisban;
e) $p(x) \mapsto p'(x)$ a legföljebb másodfokú valós polinomok terén, a standard $\{1, x, x^2\}$ bázisban;
f) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x + y, y, x)$, $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (2, 0)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ bázispárban;
g) Az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard bázisban.

3. Számítsuk ki az $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ leképezés mátrixának a rangját! Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!

4. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt az $\mathbb{R}^3$ vektortéren, amelyre

a) $0 \neq \operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Im}\varphi$;
b) $\operatorname{Ker}\varphi$ 1 dimenziós, és $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;
c) $\operatorname{Im}\varphi$ 2 dimenziós, és φ az $\operatorname{Im}\varphi$ minden vektorát önmagába viszi;
d) $\varphi^3 = 0$, de $\varphi^2 \neq 0$.

5. A mátrix felírása nélkül állapítsuk meg, mik a (valós) sajátértékei és sajátvektorai a következő lineáris transzformációknak:

a) $\mathbb{R}^3$ tükrözése az $(1, 2, 2)$ vektorra merőleges, az origón átmenő síkra;
b) $\mathbb{R}^3$ $90°$-os elforgatása az x tengely körül;
c) $\mathbb{R}^2$ merőleges vetítése az $y = 2x$ egyenesre;
d) az $(1, 0, 2)$ vektorral való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ben;

6. Keressük meg az alábbi mátrixok összes (komplex) sajátértékét és sajátvektorát! Írjuk le az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ és $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$ leképezések hatását $\mathbb{R}^2$-ben!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

7. Melyek igazak egy A négyzetes mátrixra? Amelyik igaz, azt bizonyítsuk, amelyik nem, arra adjunk ellenpéldát.

a) $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek;
b) $\mathbf{v}$ sajátvektora A^2-nek $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora A-nak;

Hf1. Hány olyan 1 rangú 3×3-as valós mátrix van, amelynek minden eleme 0 vagy 1?

Hf2. Írjuk fel az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (1, 0, 2)$ lineáris transzformáció standard mátrixát! Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát!

Hf3. Adjuk meg az $f(x, y, z) = (y - z, x + y + 2z, 3x + 2y - z)$ lineáris transzformáció mátrixát a $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (-1, 2, 3), (1, -1, -3)\}$ bázisban!