1. Melyik mátrixok diagonalizálhatók $\mathbb{C}$ fölött a következők közül? $A^n = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Van-e olyan komplex elemű mátrix, amelynek a karakterisztikus és minimálpolinomja a következő?

a) $p_1(x) = (x-1)^2(x-2)^3$, $\qquad m_1(x) = (x-1)(x-2)^2$;
b) $p_2(x) = x^6 + x + 1$, $\qquad m_2(x) = x^2 + x + 1$;
c) $p_3(x) = (x-1)^2(x-2)^3(x-5)$, $\qquad m_3(x) = (x-1)^2(x-2)^2$;
d) $p_4(x) = (x^3 - x - 4)^2$, $\qquad m_4(x) = (x^3 - x - 4)$.

3. Maximum hány olyan páronként nem hasonló (komplex) mátrixot lehet megadni, amelynek a karakterisztikus polinomja $(x-1)^3 \cdot (x-2)^2$?

4. Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-normálalakja?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Legyen A 2×2-es valós mátrix. Tegyük föl, hogy az alábbi négy állítás közül pontosan egy nem igaz. Melyik lehet az?

a) A rangja legföljebb 1.
b) A-nak van sajátvektora.
c) $A^2 = A$.
d) A 0 sajátértéke A-nak.

6. Tegyük föl, hogy egy A $\mathbb{C}$ fölötti mátrixra teljesül az $A^m = I$ egyenlőség valamilyen $m \geq 1$ esetén. Igazoljuk, hogy A diagonalizálható!

7. Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók az $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ vagy $-\lambda$ sajátértéke A-nak.

Hf2. Keressük meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x - 4y - 2z, 4y + z, -4y)$ lineáris transzformáció sajátértékeit, és határozzuk meg a sajátvektorait a sajátalterek egy-egy bázisának megadásával!

Hf3. Hozzuk diagonális alakra a $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot, és számítsuk ki ennek segítségével az A^n hatványt.