1. *Egy egység élű kocka alaplapja az $ABCD$ négyzet, fedőlapja $A'B'C'D'$, ahol az egyes csúcsok az alapon azonos betűvel jelzett csúcsok fölött vannak. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:*

$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{B'C'}|$, $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$, $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C}$, $\quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'}$, $\quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'}$ $\quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC'}$

Megoldás: $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{B'C'}| = |\overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{B'C'}| = |\overrightarrow{D'B} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{D'C}| = \sqrt{2}$,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA}) = -1$,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$,
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'} = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos 60^\circ = 1$, ugyanis $AB'C$ egy lapátlókból álló szabályos háromszög,
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AC}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\overrightarrow{CC'} = (\sqrt{2})^2 + 0 = 2$.
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB'}$ hossza $1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 1$, merőleges az ABB' síkra, tehát $\overrightarrow{AD}$-vel párhuzamos, de ellenkező irányba mutat, így a vektoriális szorzat $\overrightarrow{DA}$.

Vagy koordinátákkal: Legyen $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $A'(0,0,1)$, $B'(1,0,1)$, $C'(1,1,1)$ és $D'(0,1,1)$. Ekkor
$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{B'C'}| = |(1,0,0) - (0,1,1) + (0,1,0)| = |(1,0,-1)| = \sqrt{2}$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} = (1,0,0)(-1,0,0) = -1$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C} = (1,0,0)(0,0,-1) = 0$,
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'} = (1,1,0)(1,0,1) = 1$,
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'} = (1,1,0)(1,1,1) = 2$,
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{DC'} = (1,0,0) \times (1,0,1) = \mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} - \mathbf{j} = (0,-1,0)$

2. *Mely* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorokra teljesülnek az alábbi összefüggések?*

a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;
b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;
c) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

Megoldás: a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \Leftrightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \Leftrightarrow 2\mathbf{ab} = 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \Leftrightarrow$ $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge 0°, azaz $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak és egy irányba mutatnak.

b) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ akkor és csak akkor, ha $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ és $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$. Az első feltétel akkor teljesül, ha $\mathbf{ab} = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, azaz ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak és ellenkező irányba mutatnak, és emellett kell teljesülnie a második feltételnek, azaz hogy $\mathbf{a}$ nem rövidebb $\mathbf{b}$-nél.

c) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \Leftrightarrow (\mathbf{b}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 \Leftrightarrow 2\mathbf{aa} = -2\mathbf{ab} \Leftrightarrow \mathbf{ab} = 0$, azaz, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek.

(Geometriai megfontolással: az a) feltétel azt jelenti, hogy az ABC háromszög, amelyben $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, elfajuló, és az ABC szög 180°-os, a b) feltétel ugyanezzel a jelöléssel azt, hogy az ABC szög 0°-os, és $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$, a c) feltétel pedig azt, hogy az egy csúcsból induló $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor által meghatározott paralelogramma átlói azonos hosszúságúak, tehát a paralelogramma téglalap.

3. *Legyen O az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ csúcspontok által meghatározott szabályos n-szög középpontja. Határozzuk meg az $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}$ vektorösszeget!*

Megoldás: Legyen a vektorok összege $\mathbf{v}$. Ha 0 körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel elforgatjuk a síkot, akkor az $\overrightarrow{OA_i}$ vektorok egymás között permutálódnak, tehát az elforgatottak összege szintén $\mathbf{v}$ lesz. Másrészt az elforgatottakat egymás után tologatva az egész ábra, és így a kapott összegvektor is az eredetinek az elforgatottja lesz, ezért összegként a $\mathbf{v}$ vektor $\frac{2\pi}{n}$ szögű elforgatottját kapjuk. A $\mathbf{v}$ vektor csak akkor egyezhet meg a $\frac{2\pi}{n}$ szögű elforgatottjával, ha $\mathbf{v} = 0$.

4. *Tegyük föl, hogy a C pont $m : n$ arányban osztja két részre az AB szakaszt. Jelöljön O egy tetszőleges pontot. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OC}$ vektort az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok, valamint m és n segítségével!*

Megoldás: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

5. *Legyen F az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja, H pedig a BC oldal C-hez közelebbi harmadolópontja. Milyen arányban osztja egymást a CF és az AH szakasz?*

Megoldás: Legyen M a CF és AH szakasz metszéspontja, és jelöljük $\mathbf{b}$-vel az $\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c}$-vel pedig az $\overrightarrow{AC}$ vektort. Ekkor $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \lambda \cdot \overrightarrow{FC}$ valamilyen λ skalárra, és ezt tovább alakítva azt kapjuk, hogy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \lambda \cdot (\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{b}) = (\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2})\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$. Másrészt $\overrightarrow{AM} = \mu \cdot \overrightarrow{AH} = \mu(\frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}) = \frac{\mu}{3}\mathbf{b} + \frac{2\mu}{3}\mathbf{c}$. Mivel $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ függetlenek, ebből $\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{3}$ és $\lambda = \frac{2\mu}{3}$, így $\mu = \frac{3}{4}$ és $\lambda = \frac{1}{2}$. Tehát a két szakasz metszéspontja felezi a CF szakaszt, és negyedeli (a H-hoz közelebb) az AH szakaszt.

6. *a) Határozzuk meg az* $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ *és* $\mathbf{b} = (2, 1, -1)$ *vektorok szögét!*
b) Adjuk meg az $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ *vektor merőleges vetületét a* $\mathbf{b} = (2, -1, 2)$ *vektorra!*

Megoldás: a) A szög koszinusza $\dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, így a két vektor 60°-os szöget zár be egymással.

b) A vetületvektor $\dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = \frac{5}{9}(2, -1, 2) = (\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{10}{9})$.

7. *Határozzuk meg az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *nem nulla vektorok szögét, ha tudjuk, hogy* $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ *merőleges* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$*-re, továbbá* $4\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *merőleges* $\mathbf{b}$*-re!*

Megoldás: $0 = (5\mathbf{a}+2\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 5\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{b}^2 - 3\mathbf{ab}$, és $0 = (4\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{b} = \mathbf{b}^2 + 4\mathbf{ab}$. Ebből $\mathbf{ab} = -\frac{1}{4}\mathbf{b}^2$, és $\mathbf{a}^2 = \frac{1}{4}\mathbf{b}^2$, tehát a két vektor szögének koszinusza $-\frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2/\frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{b}| = -\frac{1}{2}$, így a két vektor szöge 120°.

8. *Ha* $\mathbf{a}$ *merőleges* $\mathbf{b}$*-re, akkor mivel egyenlő az* $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ *vektor?*

Megoldás: Ha $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ nullvektor, akkor $\mathbf{0}$ az eredmény. Ha nem, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a merőlegesség miatt függetlenek, és így kifeszítenek egy síkot, amelynek normálvektora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$ vektor merőleges $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-re, tehát benne van $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjában, és merőleges $\mathbf{a}$-ra is, ezért párhuzamos $\mathbf{b}$-vel, tehát $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

9. *Legyen* $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ *és* $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$*. Bizonyítsuk be, hogy*
a) P *akkor és csak akkor van rajta a* P_0*-t tartalmazó, az* $\mathbf{n} = (a, b, c)$ *vektorra merőleges síkon, ha* $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$*;*
b) P *akkor és csak akkor van rajta a* P_0*-on átmenő, a* $\mathbf{v} = (a, b, c)$ *vektorral párhuzamos egyenesen, ha van olyan* $t \in \mathbb{R}$*, amelyre* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$*.*
Írjuk fel a kapott egyenleteket koordinátákkal is!

Megoldás: a) P akkor van rajta a síkon, ha $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ párhuzamos a síkkal, azaz merőleges a normálvektorára, és ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$. Koordinátákkal: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

b) P akkor van az egyenesen, ha $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, azaz $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$ valamely $t \in \mathbb{R}$-re. Koordinátákkal: $x = x_0 + at,\ \ y = y_0 + bt,\ \ z = z_0 + ct$.

10. *Fejezzük ki vektorműveletekkel egy* $\mathbf{v}$ *vektor* $\mathbf{nr} = \mathbf{0}$ *síkra vonatkozó tükörképét, illetve egy* $\mathbf{b}$ *irányvektorú, origón átmenő egyenes körüli* 90°*-os elforgatottját!*

Megoldás: A $\mathbf{v}$ vektort mint egy pont helyvektorát értjük, és a végpontot tükrözzük az origón átmenő $\mathbf{rn} = 0$ síkra. A tükörkép helyvektorát megkapjuk úgy, hogy $\mathbf{v}$-t levetítjük $\mathbf{n}$-re, és $\mathbf{v}$-ből kivonjuk a vetület kétszeresét: $\mathbf{v} - 2\frac{\mathbf{vn}}{\mathbf{nn}}\mathbf{n}$.

Ha $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$, és P' az P-nek az egyenesre vett vetülete, akkor P elforgatottját megkaphatjuk úgy is, hogy a $\overrightarrow{P'P}$ vektort forgatjuk el 90°-kal, s mivel $\overrightarrow{P'P}$ merőleges $\mathbf{b}$-re, az elforgatottat megkaphatjuk vektoriális szorzattal: $\frac{1}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b} \times \overrightarrow{P'P}$. Így a $\mathbf{v}$ vektor elforgatottja $\overrightarrow{OP'} + \frac{1}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b} \times \overrightarrow{P'P} = \frac{\mathbf{vb}}{\mathbf{bb}}\mathbf{b} + \frac{1}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b} \times (\mathbf{v} - \frac{\mathbf{vb}}{\mathbf{bb}}\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{vb}}{\mathbf{bb}}\mathbf{b} + \frac{1}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b} \times \mathbf{v}$

11. *Bizonyítsuk be, hogy egy egységelemes félcsoportban*
a) ha a *és* b *invertálható, akkor* ab *és* ba *is invertálható;*
b) ha ab *és* ba *invertálható, akkor* a *és* b *is invertálható!*
c) Egy halmaz önmagába menő leképezései egységelemes félcsoportot alkotnak a kompozícióra nézve. Lássuk be, hogy végtelen halmaz esetén van ebben olyan a *és* b *elem, amelyre* ab *invertálható, de* a *és* b *nem!*

Megoldás: a) Ha e az egységelem, a^{-1} az a inverze, és b^{-1} a b inverze, akkor $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$, és $(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$. Ugyanígy ba inverze $a^{-1}b^{-1}$.

b) a-nak jobb inverze $b(ab)^{-1}$: $ab(ab)^{-1} = e$, és bal inverze $(ba)^{-1}b$: $(ba)^{-1}ba = e$. Ha a félcsoport egy elemének van jobb és bal inverze is, akkor azok megegyeznek, és inverzét adják az adott elemnek. Így a invertálható, és hasonlóan b is.

c) Legyen $H = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a végtelen halmaz, és $a(x) = x - 1$, ha $x \geq 1$, és 0, ha $x = 0$. Legyen $b(x) = x + 1$ minden $x \in H$-ra. Ekkor $ab(x) = x$ minden x-re, tehát ab a félcsoport egységeleme, így invertálható is. Viszont $ba(0) = ba(1) = 1$, tehát ba nem lehet invertálható: akármilyen c leképezésre $cba(0) = cba(1)$, tehát cba nem lehet az identikus leképezés.

12. *Gyűrűt, illetve testet alkot-e* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *a komponensenkénti műveletekre nézve (azaz:* $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ *és* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$*)? Van-e egységelem, nullelem?*

Megoldás: Gyűrűt, sőt kommutatív gyűrűt alkot: a $+$ és $\cdot$ kommutatív és asszociatív, továbbá teljesül a disztributivitás, mert komponensenként teljesülnek ezek az azonosságok. $(0, 0)$ nullelem, $(-a, -b)$ az (a, b) elem additív inverze, és $(1, 1)$ egységelem. Viszont nem alkot testet, mert például $(1, 0)$-nak nincs inverze.

13. *Lássuk be, hogy tetszőleges gyűrűben* $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ *minden a elemre, továbbá* $(a(-b) = (-a)b = -(ab)$ *minden* a, b*-re!*

Megoldás: $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, és mindkét oldalon hozzáadva az $a \cdot 0$ additív inverzét azt kapjuk, hogy $0 = a \cdot 0$. Ugyanígy $0 \cdot a = 0$.
$a(-b) = -(ab)$, mert $a(-b) + ab = a((-b) + b) = a0 = 0$, és ugyanígy $(-a)b = -(ab)$.

14. *a) Bizonyítsuk be, hogy* $\mathbb{Q}$*-nak nincs olyan valódi részhalmaza, amely az eredeti műveletekkel testet alkot!*

b) Bizonyítsuk be, hogy a legkisebb olyan résztest $\mathbb{R}$*-ben, amely tartalmazza a* $\sqrt{2}$ *számot, az* $\{\, a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\}$.

Megoldás: a) Ha egy részhalmaz az eredeti műveletekkel testet (tehát $\mathbb{Q}$-ban résztestet) alkot, akkor van benne nullelem és egységelem, és az nem lehet más, mint a 0 és az 1 (ha $a + a = a$, akkor $a = 0$, és ha $a \neq 0$, és $a^2 = a$, akkor $a = 1$). Mivel 1 benne van a résztestben, annak akárhányszoros összege, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ is, és ezek negatívja is (más additív inverze nem lehet). Ugyanígy a multiplikatív inverz létezéséből következik, hogy minden $0 \neq n \in \mathbb{Z}$-re $\frac{1}{n}$ is benne van a résztestben, és így minden racionális szám is.

b) Az ilyen alakú számok nyilván benne vannak az adott résztestben (az a)-beli okoskodás mutatja, hogy $\mathbb{Q}$ benne van minden résztestben, és mivel $\sqrt{2}$ is ott van, ezért minden $a + b\sqrt{2}$ szám is, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$. Azt kell még belátni, hogy az ilyen számok valóban résztestet alkotnak, tehát zártak az összeadásra, szorzásra, additív inverzre és multiplikatív inverzre. Az összeadásra és additív inverzre való zártság nyilvánvaló a szorzatra való zártság az $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}$ átalakításból, a multiplikatív inverzre való zártság pedig az $\dfrac{1}{a + b\sqrt{2}} = \dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \dfrac{a}{a^2 - 2b^2} - \dfrac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$ átalakításból következik (itt felhasználjuk azt, hogy $a^2 - 2b^2$ nem lehet 0, ha $a + b\sqrt{2} \neq 0$, ugyanis $\sqrt{2}$ nem racionális.

Hf1. *Legyen az ABC háromszögre* $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ *és* $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$*. Írjuk fel a háromszög C-ből kiinduló súlyvonalát, magasságát és szögfelezőjét mint vektorokat az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok és vektorműveletek (beleértve az abszolútértéket is) segítségével!*

Hf2. *Tegyük fel, hogy az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok hossza 1 és 2, a* $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *vektoré pedig 2. Határozzuk meg* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *szögét!*

Hf3. *Tekintsük egy* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorra az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$, $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$, … *sorozatot. Hányadik lehet az első* $\mathbf{0}$ *vektor a sorozatban. Ha ilyen nincs, hány különböző iránya van a sorozatban szereplő vektoroknak?*