1. *Testet alkotnak-e az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ elemei, ha az összeadás $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, a szorzás pedig*
a) $(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$, *illetve*
b) $(a,b)*(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$*?*

Megoldás: a) Az összeadásra csoportot alkot, mert mindkét komponensben kommutatív és asszociatív az összeadás, $(0,0)$ additív egységelem, és (a,b) additív inverze $(-a,-b)$.
A disztributivitás is teljesül: $(a+a',b+b')*(c,d)=((a+a')c-(b+b')d,(a+a')d+(b+b')c)=(ac-bd+a'c-b'd,ad+a'd+bc+b'c)=(ac-bd,ad+bc)+(a'c-b'd,a'd+b'c)=(a,b)*(c,d)+(a',b')*(c,d)$.
A szorzás kommutatív: $(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,cb+da)=(c,d)*(a,b)$, és asszociatív: $((a,b)*(b,c))*(e,f)=(ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)$, és $(a,b)*((c,d)*(e,f))=(a,b)*(ce-df,cf+de)=(ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf)$ megegyezik az előzővel.
Egységelem az $(1,0)$: $(1,0)*(a,b)=(a-0,b+0)=(a,b)$.
Ha $(a,b)\neq(0,0)$, akkor $(a/(a^2+b^2),-b/(a^2+b^2))$ az inverze (értelmezve van, mert $a,b\in\mathbb{R}$-re $a^2+b^2>0$, ha $(a,b)\neq(0,0)$: $(a,b)*(a/(a^2+b^2),-b/(a^2+b^2))=((a^2+b^2)/(a^2+b^2),(-ab+ba)/(a^2+b^2))=(1,0)$.

b) Nem alkot testet, mert multiplikatív egység ugyan van: $(1,0)*(a,b)=(a,b)*(1,0)=(a,b)$, de nincs mindennek inverze: $(1,1)$ inverze (a,b), ha $(a+b,a+b)=(1,0)$, ami nem lehet. (Az összeadás azonosságai, a disztributivitás, a szorzás kommutativitása és asszociativitása is igaz, tehát kommutatív gyűrűt kapunk, csak nem testet. Mellesleg nem is 0-osztómentes: $(1,1)*(1,-1)=(0,0)$.)

2. *Adjuk meg az alábbi komplex számok kanonikus (algebrai) alakját:*

a) $z=(3-4i)(7+8i)$; *b)* $z=\dfrac{3-4i}{2-i}$; *c)* $z=i^{87}$; *d)* $z=(1+i)^9$.

Megoldás: a) $53-4i$; b) $\frac{(3-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{10-5i}{4+1}=2-i$. c) Mivel $i^4=(-1)^2=1$, $i^{87}=i^3=-i$. d) Mivel $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^9=(2i)^4\cdot(1+i)=16+16i$.

3. *a) Számítsuk ki a $16-30i$ komplex szám négyzetgyökeit.*
b) Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok körében minden számból lehet négyzetgyököt vonni.

Megoldás: a) Az $(x+yi)^2=16-30i$ egyenletet oldjuk meg $x,y\in\mathbb{R}$-re. A négyzetre emelés után, kihasználva, hogy az algebrai alak egyértelmű, a következő két egyenletet kapjuk: $x^2-y^2=16$, $2xy=-30$. Az utóbbiból kifejezve y-t és az elsőbe behelyettesítve: $x^2-\frac{225}{x^2}=16$, azaz $x^4-16x^2-225=0$, tehát $x^2=25$ vagy $x^2=-9$. Az utóbbi $x\in\mathbb{R}$ miatt nem lehet, tehát $x^2=25$, így $x=\pm5$, és $y=-\frac{15}{x}=\mp3$. A kapott két megoldás $z=\pm(5-3i)$.

b) Ha $a+bi$-ből kell négyzetgyököt vonni, $b=0$-ra $\pm\sqrt{a}$, illetve $a<0$ esetén $\pm i\sqrt{-a}$ a megoldás, különben pedig az előbbi módon az $(x+yi)^2=a+bi$ egyenletből kapott egyenlet x-re $x^4-ax^2-(b^2/4)=0$, amiből $x^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ értelmezve van $a^2+b^2\geq0$ miatt, és a két megoldás közül a nagyobbik pozitív, így $x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, és $y=\frac{b}{2x}$.

4. *Legyen $z=1+3i$ és $u=2-i$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:*
a) $z\bar{z}$ *b)* $u/\bar{u}$ *c)* $|z-u|$ *d)* $|2z-zu|$ *e)* $|u/z\bar{u}^3|$.

Megoldás: a) $z\bar{z}=|z|^2=1+9=10$. b) $u/\bar{u}=u^2/(u\bar{u})=(3-4i)/5=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$. c) $|z-u|=|-1+4i|=\sqrt{17}$ d) $|2z-zu|=|2-u|\cdot|z|=|i|\cdot|1+3i|=\sqrt{10}$ e)$|u/(z\bar{u}^3)|=|u|/(|z|\cdot|\bar{u}|^3)=|u|/(|z||u|^3)=1/(|z||u|^2)=1/(5\sqrt{10})$.

5. *Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:*

a) $|z-5+i|=2$ *b)* $|z-i|=|z+i|$ *c)* $|z|=3iz$

d) $z+\bar{z}<4$ *e)* $2z+5=2\bar{z}$ *f)* $\left|\dfrac{z-3+4i}{z-i}\right|\geq1$

Megoldás: a) $|z-(5-i)|=2$, ha z távolsága $5-i$-től 2, tehát ez az $5-i$ körüli 2 sugarú kör.

b) z távolsága i-től és $-i$-től megegyezik, tehát z az i-t és $-i$-t összekötő szakasz felező merőlegesén, azaz az x tengelyen van. A megoldás az x tengely, azaz $\{\,z\mid\operatorname{Im}z=0\,\}$.

c) Ha $|z|=3iz$, akkor $|z|=|3iz|=3|z|$. Ebből következik, hogy $|z|=0$, tehát $z=0$. A mértani hely csak az origóból áll.

d) $z=x+yi$-re a feltétel $2x<4$, azaz $x<2$. A mértani hely az $x=2$ vízszintes egyenes alatti nyílt félsík.

e) $z = x + yi$-re $2x + 2yi + 5 = 2x - 2yi$, amiből $y = -\frac{5}{4}i$, de ez $y \in \mathbb{R}$ miatt lehetetlen. Tehát a mértani hely az üres halmaz.

f) Az egyenlőtlenséget átírhatjuk $|z - 3 + 4i| \geq |z - i|$ alakba, és az utóbbit azok a z komplex számok elégítik ki, amelyek i-től nincsenek távolabb, mint $3 - 4i$-től. Ez az i-t és $3 - 4i$-t összekötő szakasz felező merőlegese által kettévágott sík i-t tartalmazó zárt félsíkja, kihagyva az i pontot, mert ott a hányados nincs értelmezve.

6. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:*

a) $z^2 = -12$;
b) $z^2 + 3z + 4 = 0$;
c) $z^2 = i$;
d) $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$.

Megoldás: a) $z = \pm 2\sqrt{3}i$.

b) $z = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{2}i$.

c) $(1+i)^2 = 2i$ miatt $z = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$.

d) $z = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+4-4i}}{2} = -i \pm \sqrt{-i} = -i \pm (-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$, tehát $-\frac{1}{\sqrt{2}} + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)i$ és $\frac{1}{\sqrt{2}} - (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})i$.

7. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében, és ábrázoljuk a megoldásokat a komplex számsíkon.*

a) $x^3 - 1 = 0$ *b)* $x^4 - 1 = 0$ *c)* $x^4 + 1 = 0$ *d)* $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$

Az d) egyenletnél osszunk le x^2-tel, és vezessük be az $u = x + (1/x)$ helyettesítést.

Megoldás:

a) $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) $x_1, 2 = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i$.

c) $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$, tehát a gyökei $x_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

d) $x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 5(x + \frac{1}{x}) + 4 = 0$, ha $x + \frac{1}{x} = 1$ vagy 4. Az elsőből $x^2 - x + 1 = 0$, tehát $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, a másodikból $x^2 - 4x + 1 = 0$, tehát $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$.

8. *Mi a geometriai jelentése annak, hogy egy z komplex számot megszorzunk i-vel? Hát annak, ha $(1+i)$-vel szorzunk? És ha vesszük a z konjugáltjának a reciprokát ($z \neq 0$-ra)?*

Megoldás: Az i-vel való szorzás $90°$-os forgatás pozitív irányban. Az $(1+i)$-vel való szorzás $45°$-os szögű, $\sqrt{2}$-szörös forgatva nyújtás. A $z \mapsto 1/\bar{z}$ az origó körüli egység sugarú körre vonatkozó inverzió.

9. *Hozzuk trigonometrikus alakra az alábbi komplex számokat:*

a) $1 + i$; *b)* -8; *c)* $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; *d)* $1 - i \operatorname{tg} \alpha$; *e)* $\sin 12° - i \cos 12°$.

Megoldás: a) $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$ vagy radiánban $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$.

b) $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$.

c) $\cos 150° + i \sin 150°$.

d) $\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$ trigonometrikus alak, ha $\cos\alpha > 0$. Ha $\cos\alpha < 0$, akkor $-\frac{1}{\cos\alpha}(-\cos\alpha + i\sin\alpha) = -\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha))$ a trigonometrikus alak.

e) $\sin 12° - i\cos 12° = \cos 78° - i \sin 78° = \cos(-78°) + i\sin(-78°)$.

10. *Számítsuk ki*

a) a $(-\sqrt{3} + i)^{-9}$ *komplex szám értékét, és hozzuk az eredményt algebrai alakra;*
b) $-243i$ *összes ötödik gyökét (trigonometrikus alakban);*
c) a $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$ *egyenlet összes megoldását;*
d) a $\overline{z} = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ *egyenlet összes megoldását.*

Megoldás: a) $-\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$, és a -9. hatványa $\frac{1}{512}(\cos(-\frac{45\pi}{6}) + i\sin(-\frac{45\pi}{6})) = \frac{1}{512}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{512}i$

b) $-243i = 243(\cos 270° + i\sin 270°)$, és az ötödik gyökei $3(\cos(54° + k \cdot 72°) + i\sin(54° + k\cdot 72°))$, ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (tehát a szögek $54°$, $126°$, $198°$, $270°$ és $342°$).

c) $z^3 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 + 4i}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3 + 4i}}{2}$. A $-3 + 4i$ négyzetgyökét algebrai alakban kiszámolhatjuk: $\pm(1 + 2i)$, tehát $z^3 = \frac{1 \pm 1 + 2i}{2}$, tehát $z^3 = 1 + i$ vagy $-i$. Az $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$

trigonometrikus alakból $z_{1,2,3} = \sqrt[6]{2}(\cos(15° + k \cdot 120°) + i \sin(15° + k \cdot 120°))$ (ahol $k = 0, 1, 2$), míg a $-i = \cos 270° + i \sin 270°$) trigonometrikus alakból $z_{4,5,6} = \cos(90° + k \cdot 120°) + i \sin(90° + k \cdot 120°))$ (ahol $k = 0, 1, 2$).

d) A két oldal abszolút értékének egyenlőségéből $|z| = |z|^n$, tehát vagy $z = 0$, vagy $|z|^{n-1} = 1$. Az utóbbiból $n > 1$ esetén $|z| = 1$ következik. Ha $n = 1$, akkor az egyenlet $\bar{z} = z$, amelynek pontosan a valós számok megoldásai. Ha $n > 1$, akkor $|z| = 1$ miatt $\bar{z} = |z|^2/z = 1/z$, tehát a $z^{n+1} = 1$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai az $(n+1)$-edik egységgyökök: $\cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{n+1}$), ahol $k = 0, 1, \ldots, n$).

11. *Bizonyítsuk be, hogy egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójának különböző csúcsainál vett harmadoló, illetve negyedelő pontja által alkotott szakasz $45°$-os szög alatt látszik a háromszög átellenes csúcsából!*

Megoldás: Feltehetjük, hogy a háromszög csúcsai 0, 1 és i a komplex számsíkon, és a harmadoló pont az 1-hez közelebbi $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$, a negyedelő pont pedig az i-hez közelebbi $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$. Az origóból a két osztópontba mutató vektorok szögét kell kiszámítani, ami éppen a két komplex szám hányadosának szöge. $(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i)/(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i) = \frac{3}{4}((1 + 3i)/(2 + i)) = \frac{3}{4}((5 + 5i)/5) = \frac{3\sqrt{2}}{4}(\cos 45° + i \sin 45°)$, így az osztópontok által határolt szakasz valóban $45°$-os szögben látszik a derékszögű csúcsból.

12. *Adjuk meg $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényként (a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) az alábbi síktranszformációkat:*

a) origo körüli α szögű forgatás;
b) $1 + i$ körüli $60°$-os forgatás
c) Az x, illetve az y tengelyre való tükrözés;

Megoldás: a) A $\cos \alpha + i \sin \alpha$ komplex számmal való szorzás.

b) $z \mapsto (z - 1 - i)\varepsilon + 1 + i$, ahol $\varepsilon = \cos 60° + i \sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Az x tengelyre való tükrözés: $z \mapsto \bar{z}$, az y tengelyre való tükrözés $z \mapsto -\bar{z}$.

Hf1. *Határozzuk meg azon z számok mértani helyét a komplex számsíkon, amelyekre $|z| = iz$.*

Hf2. *Adjuk meg az alábbi egyenlet összes megoldását:*

$$\frac{2z}{1-i} + \frac{2}{z-1} = -1 + 2i.$$