1. *a) Tetszőleges n természetes számra számítsuk ki $(1+i)^n$ értékét.*
b) Határozzuk meg az $\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots$ összeg értékét.
c) Fejezzük ki $\cos(7x)$-et $\cos x$ és $\sin x$ segítségével.

Megoldás: a) $1+i=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, így $(1+i)^n=2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$.

b) A binomiális tétel szerint $(1+i)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k$, és ennek valós része éppen a fenti összeg. Tehát az összeg $\operatorname{Re}2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})=2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$. Ezt n 8-cal vett maradékai szerint kiértékelve azt kapjuk, hogy

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots=\begin{cases}0, & \text{ha } n=8k\pm 2\\ -2^{n/2}, & \text{ha } n=8k+4\\ 2^{n/2}, & \text{ha } n=8k\\ 2^{(n-1)/2}, & \text{ha } n=8k\pm 1\\ -2^{(n-1)/2} & \text{ha } n=8k\pm 3\end{cases}$$

2. *Bizonyítsuk be, hogy minden n-edik egységgyök primitív d-edik egységgyök valamilyen $d\mid n$-re.*

Megoldás: ε n-edik egységgyök, ha $\varepsilon^n=1$, és primitív d-edik egységgyök, ha d a legkisebb olyan pozitív egész kitevő, hogy $\varepsilon^d=1$. Nyilván igaz, hogy $d\le n$. Osszuk el n-et maradékosan d-vel: $n=dq+r$. Ekkor $1=\varepsilon^n=\varepsilon^{dq+r}=(\varepsilon^d)^q\varepsilon^r=1^q\varepsilon^r=\varepsilon^r$. De $r<d$, így a d minimalitása miatt r csak 0 lehet, azaz $n=dq$, így d osztója n-nek.

3. *Ha ε n-edik primitív egységgyök, ε^k, $\bar{\varepsilon}$ és $-\varepsilon$ hányadik primitív egységgyökök?*

Megoldás: Egy n-edik egységgyök trigonometrikus alakja $\varepsilon=\cos(\frac{\ell}{n}2\pi)+i\sin(\frac{\ell}{n}2\pi)$ valamely $\ell\in\mathbb{Z}$-re, ugyanis $\varepsilon=\sqrt[n]{1}$. Ha ε primitív n-edik egységgyök (azaz ε rendje n), az azt jelenti, hogy a szöge (és így annak 2π-kkel való eltoltjai) $\frac{\ell}{n}2\pi$ alakúak, ahol $\frac{\ell}{n}$ nem egyszerűsíthető. ε^k szöge $\frac{\ell k}{n}2\pi$, és $\frac{\ell k}{n}=\frac{\ell\frac{k}{(k,n)}}{\frac{n}{(k,n)}}$ egyszerűsített alakban (minthogy $(\frac{k}{(k,n)},\frac{n}{(k,n)})=1$, és $(\ell,\frac{n}{(k,n)})=1$), tehát ε^k rendje $\frac{n}{(k,n)}$.

$\bar{\varepsilon}$ szöge $-\frac{\ell}{n}2\pi$, és $-\frac{\ell}{n}$ ugyanúgy egyszerűsíthetetlen, mint $\frac{\ell}{n}$, tehát $\bar{\varepsilon}$ rendje is n.

$-\varepsilon=(\cos\pi+i\sin\pi)(\cos\frac{\ell}{n}2\pi+i\sin\frac{\ell}{n}2\pi)$ szöge $(\frac{1}{2}+\frac{\ell}{n})2\pi=\frac{n+2\ell}{2n}2\pi$. Ha n páratlan, akkor $\frac{n+2\ell}{2n}$ egyszerűsíthetetlen, mert $(n+2\ell,2)=1$, és $(n+2\ell,n)=(2\ell,n)=(\ell,n)=1$, tehát ekkor $-\varepsilon$ rendje $2n$. Ha n osztható 4-gyel: $n=4k$, akkor $\frac{n+2\ell}{2n}=\frac{4k+2\ell}{8k}=\frac{2k+\ell}{4k}$ egyszerűsíthetetlen, ugyanis $(\ell,4k)=1$ miatt ℓ páratlan, így $2k+\ell$ is, és $(2k+\ell,4k)=(2k+\ell,2k)=(\ell,2k)=1$. Tehát ebben az esetben $-\varepsilon$ rendje n. Végül, ha $n=4k+2$, akkor $\frac{n+2\ell}{2n}=\frac{4k+2+2\ell}{8k+4}=\frac{2k+1+\ell}{4k+2}=\frac{(2k+1+\ell)/2}{2k+1}$ az egyszerűsített alak: a számláló egész, mivel $(\ell,4k+2)=1$ miatt ℓ páratlan, tehát $2k+1+\ell$ páros; a nevező pedig páratlan, így $(\frac{2k+1+\ell}{2},2k+1)=(2k+1+\ell,2k+1)=(\ell,2k+1)=1$. Tehát ebben az esetben $-\varepsilon$ rendje $\frac{n}{2}$. Összesítve:

$$-\varepsilon\text{ rendje }=\begin{cases}2n, & \text{ha } n \text{ páratlan}\\ n, & \text{ha } n \text{ osztható 4-gyel}\\ n/2, & \text{ha } n=4k+2\end{cases}$$

4. *Számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét!*

Megoldás: Legyen $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. Ekkor $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots,\varepsilon^{n-1}$ az összes n-edik egységgyök.

Az összegük $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}=\frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}=\frac{1-1}{1-\varepsilon}=0$, ha $n>1$, és 1, ha $n=1$.

A szorzatuk $1\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon^2\cdots\varepsilon^{n-1}=\varepsilon^{0+1+\ldots+(n-1)}=\varepsilon^{n(n-1)/2}$. Ha n páratlan, akkor a kitevő $n\cdot\frac{n-1}{2}$ osztható n-nel, így a szorzat 1. Ha n páros, akkor a szorzat $(\varepsilon^{n/2})^{n-1}$, ahol $\varepsilon^{n/2}$ négyzete 1, de önmaga nem, így $\varepsilon^{n/2}=-1$, és az egységgyökök szorzata $(\varepsilon^{n/2})^{n-1}=(-1)^{n-1}=-1$.

Ha n páratlan, akkor az egységgyökök négyzetei mind különbözők: $i \neq j$-re $\varepsilon_i^2 - \varepsilon_j^2 = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$, ahol $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, és $\varepsilon_i \neq -\varepsilon_j$, ugyanis $(-\varepsilon_j)^n = (-1)^n = -1$. Így az egységgyökök négyzetei az összes egységgyököt előállítják valamilyen sorrendben, és ezért az összegük megegyezik az egységgyökök összegével, 0-val (illetve $n = 1$ esetén 1-gyel).

Ha n páros, akkor a négyzeteik $n/2$-edik egységgyökök, mindegyik előfordul 2-szer: $\varepsilon^2 = (-\varepsilon)^2$, és van köztük $n/2$ különböző, ugyanis $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon, \varepsilon_3 = \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon_{n/2} = \varepsilon^{\frac{n}{2}-1}$-re $\varepsilon_i^2 - \varepsilon_j^2 = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$, és itt a második tényező sem 0, mert $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n/2}$ mind a sík felső felében vannak (beleértve az x tengely pozitív felét), a -1-szereseik pedig az alsó felében (beleszámítva az x tengely negatív felét). Tehát ekkor a négyzetek összege az $\frac{n}{2}$-edik egységgyökök összegének 2-szerese, ami 0, ha $n > 2$, és 2, ha $n = 2$.

5. *Oldjuk meg az $x^3 + 6x + 2 = 0$ egyenletet a Cardano-képlet segítségével!*

Megoldás: Az $x^3 + px + q = 0$ egyenlet megoldásai az $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$ egyik értékével és $v = -\frac{\frac{p}{3}}{u}$-val $x_1 = u+v$, $x_2 = \varepsilon u + \bar{\varepsilon} v$ és $x_3 = \bar{\varepsilon} u + \varepsilon v$, ahol $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ primitív 3-adik egységgyök. Ebben az esetben $p = 6$ és $q = 2$, tehát $u = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + 2^3}}$ egyik értéke (itt érdemes a valós gyököt választani) $\sqrt[3]{2}$, amiből $v = -\sqrt[3]{4}$, tehát $x_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$, $x_2 = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}{2} i$, és $x_3 = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}{2} i$.

6. *Osszuk el maradékosan az $x^5 - 3x^4 + 2x + 1$ polinomot*
a) $(x^2 + 2x - 3)$*-mal;*
b) $(x - 2)$*-vel;*
c) $(x^2 - 4)$*-gyel.*

Megoldás: a) $x^5 - 3x^4 + 2x + 1 = (x^2 + 2x - 3)(x^3 - 5x^2 + 13x - 41) + (123x - 122)$. A sima polinomosztás helyett lehet akár a Horner-módszer kétszeres alkalmazásával is számolni, ugyanis $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, és ha $(x - 1)$-gyel elosztjuk a polinomot, majd a hányadost továbbosztjuk $(x + 3)$-mal, akkor azt kapjuk, hogy
$x^5 - 3x^4 + 2x + 1 = (x - 1)((x + 3)(x^3 - 5x^2 + 13x - 41) + 123) + 1 =$
$(x - 1)(x + 3)(x^3 - 5x^2 + 13x - 41) + 123(x - 1) + 1 =$
$(x^2 + 2x - 3)(x^3 - 5x^2 + 13x - 41) + (123x - 122)$.

b) $x^5 - 3x^4 + 2x + 1 = (x - 2)(x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 6) - 11$, Horner-módszerrel:

	1	−3	0	0	2	1
2	1	−1	−2	−4	−6	−11

c) $x^5 - 3x^4 + 2x + 1 = (x^2 - 4)(x^3 - 3x^2 + 4x - 12) + (18x - 47)$. Sima polinomosztással, vagy kétszeres Horner-módszerrel:

	1	−3	0	0	2	1
2	1	−1	−2	−4	−6	−11
−2	1	−3	4	−12	18	

amiből $x^5 - 3x^4 + 2x + 1 = (x - 2)((x + 2)(x^3 - 3x^2 + 4x - 12) + 18) - 11 = (x - 2)(x + 2)(x^3 - 3x^2 + 4x - 12) + 18(x - 2) - 11 = (x^2 - 4)(x^3 - 3x^2 + 4x - 12) + (18x - 47)$

7. *Milyen maradékot ad a $100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \ldots + 2x^2 + x$ polinom az $x + 1$, $x^2 - 1$, illetve az $x^2 + 1$ polinommal osztva?*

Megoldás: Polinomosztás helyett elég alkalmas helyettesítési értékeket nézni. Ha $f(x) = 100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \ldots + 2x^2 + x$, akkor $f(x) = (x + 1)q(x) + A$, ahol A konstans, amiből $f(-1) = 0 \cdot q(-1) + A = A$, tehát a maradék $f(-1) = 100 - 99 + \ldots + 2 - 1 = 50$. Ha $f(x) = (x^2 - 1)q_1(x) + Bx + C$ (a maradék legföljebb elsőfokú, mert másodfokú polinommal osztunk), akkor az $x^2 - 1$ polinom két gyökét behelyettesítve $f(1) = B + C$ és $f(-1) = -B + C$, amiből $B + C = 100 + 99 + \ldots + 1 = 5050$, míg $-B + C = 50$, tehát $B = 2500$, $C =$

2550, és az osztás maradéka $2500x+2550$. Végül az $f(x)=(x^2+1)q_2(x)+Dx+E$ osztás maradékát az x^2+1 gyökeinek behelyettesítésével kaphatjuk meg. Mivel valós polinom valóssal való osztásakor a hányados és a maradék is valós, csupán az i behelyettesítéséből is két egyenletet kapunk D-re és E-re: $f(i)=(100-98+96-\ldots)+(-99+97-95+\ldots+1)i=50-50i=E+Di$ algebrai alak $E,D\in\mathbb{R}$ miatt, tehát $E=50$, $D=-50$, és az osztás maradéka $-50x+50$.

8. *Tegyük fel, hogy $f(x)g(x)=h(x)$, ahol $f(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x]$ és $g(x)\in\mathbb{C}[x]$, továbbá, hogy $f(x)$ főegyütthatója 1. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$.*

Megoldás: Ez következik abból, hogy a $h(x)$ polinom $f(x)$-szel való maradékos osztásánál az együtthatókat mindig az $f(x)$ főegyütthatójával való osztással kapjuk, tehát az együtthatók egészek maradnak.

9. *(Racionális gyökteszt) Lássuk be, hogy ha az $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ polinomnak egy $\frac{p}{q}$ racionális szám gyöke (ahol $p,q\in\mathbb{Z}$, $(p,q)=1$), akkor $p\mid a_0$ és $q\mid a_n$.*

Megoldás: Tekintsük a $0=q^nf(\frac{p}{q})=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_2p^2q^{n-2}+a_1pq^{n-1}+a_0q^n$ összefüggést. A jobb oldali, egész számokból álló kifejezés minden tagjában szerepel tényezőként a p, kivéve az utolsót, így $p\mid a_0q^n$. De $(p,q)=1$, így $p\mid a_0$. Hasonlóan minden tagban szerepel tényezőként a q, kivéve az elsőt, így $q\mid a_np^n$, és $(p,q)=1$ miatt ebből $q\mid a_n$ következik.

10. *Keressük meg a következő polinomok összes gyökét $\mathbb{C}$-ben, és adjuk meg a polinomok gyöktényezős alakját!*

a) x^6-x^4+2
b) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$
c) x^3-1
d) x^2+x+1
e) x^n+1

Megoldás: a) Legyen $y=x^2$, és az $y^3-y^2+2=0$ egyenletet oldjuk meg előbb. A racionális gyökteszt szerint ennek a lehetséges racionális gyökei ±1, ±2, és ebből -1 valóban gyöke. A gyöktényezőt kiemelve azt kapjuk, hogy $y^3-y^2+2=(y+1)(y^2-2y+2)$, így a harmadfokú polinom gyökei -1 és $\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=1\pm i$. Ezeknek a négyzetgyökei lesznek az eredeti polinom gyökei: $\pm i$, $\sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8}+k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{8}+k\pi))$ és $\sqrt[4]{2}(\cos(-\frac{\pi}{8}+k\pi)+i\sin(-\frac{\pi}{8}+k\pi))$, ahol $k=0,1$. Így $x^6-x^4+2=(x-i)(x+i)\cdot(x-\sqrt[4]{2}(\cos\frac{1}{8}\pi+i\sin\frac{1}{8}\pi))(x-\sqrt[4]{2}(\cos\frac{9}{8}\pi+i\sin\frac{9}{8}\pi))(x-\sqrt[4]{2}(\cos\frac{15}{8}\pi+i\sin\frac{15}{8}\pi))\cdot(x-\sqrt[4]{2}(\cos\frac{7}{8}\pi+i\sin\frac{7}{8}\pi))$

b) Ez egy reciprokpolinom, így felírható $x^{n/2}$-nek és $x+\frac{1}{x}$ egy polinomjának szorzataként (mivel 0 nem gyöke a polinomnak, $\frac{1}{x}$ értelmezve van):
$x^4+2x^3+3x^2+2x+1=x^2(x^2+2x+3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})=x^2((x+\frac{1}{x})^2+2(x+\frac{1}{x})+1)=x^2(x+\frac{1}{x}+1)^2=(x^2+x+1)^2=(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$.
A polinom gyökei eszerint $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$, és gyökei a harmadik egységgyökök.

d) $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$, és gyökei a harmadik primitív egységgyökök (ez a harmadik körosztási polinom).

e) $(x^n+1)(x^n-1)=x^{2n}-1$ gyökei a $2n$-edik egységgyökök, és ebből x^n-1 gyöktényezői között azok szerepelnek, amelyek n-edik egységgyökök is. Tehát az x^n+1 polinom gyökei azok a $2n$-edik egységgyökök, amelyek nem n-edik egységgyökök: ha ε egy primitív $2n$-edik egységgyök, akkor $x^n+1=\prod_k^{n-1}(x-\varepsilon^{2k+1})$.