1. *Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?*

a) 3×3*-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;*
b) invertálható 2×2*-es valós mátrixok;*
c) a legföljebb 5*-ödfokú valós polinomok;*
d) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ *összeadásra és* $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ *skalárral való szorzásra nézve;*
e) $\mathbb{C}$ *a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve.*

Megoldás: a) $\mathbb{R}^{3\times 3}$ vektortér a mátrixok összeadásának és skalárral való szorzásának műveleti tulajdonságai miatt, a felső háromszögmátrixok pedig alterét alkotják ennek: a null mátrix is ilyen, és bármely két felső háromszögmátrix összege, illetve bármely felső háromszögmátrix skalárszorosa is felső háromszögmátrix. Ennek az altérnek bázisát alkotják az $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}$ mátrixok, ahol E_{ij} az a 3×3-as mátrix, amelynek ij-eleme 1, a többi pedig 0. Így ez az altér 6-dimenziós.

b) Invertálható mátrix 0-szorosan nem invertálható (sőt két invertálható összege se feltétlenül invertálható), így nem alkotnak vektorteret.

c) Altere a valós polinomok $\mathbb{R}[x]$ terének, mert legföljebb ötödfokúak összege és skalárszorosa is ilyen (a nulla polinomot is beleértjük). Az altér 6-dimenziós, mert bázisa 6-elemű: $\{ 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \}$.

d) Nem vektortér, mert az összeadás nem kommutatív.

e) A testműveletek tulajdonságaiból következik, hogy $\mathbb{C}$ vektortér $\mathbb{R}$ fölött. Bázisa $\{ 1, i \}$, tehát 2-dimenziós.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha a* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *vektorok közül* $\mathbf{v}_1$ *az egyetlen, amelyik előállítható a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

Megoldás: Legyen $\mathbf{v}_1$ egy előállítása a többiekből $\sum_{i=2}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i$, ahol λ_i-k skalárok. Ha van a λ_i-k között nullától különböző, mondjuk, $\lambda_j \neq 0$, akkor $\mathbf{v}_j$ is előállítható a többi vektorból: $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\lambda_j}\mathbf{v}_1 - \sum_{i\neq 1,j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\mathbf{v}_i$, ami ellentmond a feltevésnek. Tehát minden $\lambda_i = 0$, és így $\mathbf{v}_1 = 0$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha legalább egy dimenziós valós vektortérben nincs* 19 *elemű generátorrendszer, akkor van benne* 20 *elemű független rendszer!*

Megoldás: Vegyük a térnek egy bázisát. Ha ez 20-nál kisebb elemszámú, akkor a bázist kiegészíthetjük annyi elemmel, hogy 19 elemű vektorhalmazt kapjunk (ezt megtehetjük, mivel egy legalább 1-dimenziós valós vektortérnek végtelen sok eleme van), és akkor lenne 19 elemű generátorrendszer a vektortérben. Tehát a bázis legalább 20 elemű, és bármely részhalmaza független rendszer. Így van 20 elemű független rendszer is.

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha* $\{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \}$ *lineárisan független, de* $\{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e} \}$ *és* $\{ \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \}$ *lineárisan összefüggők, akkor* $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ *esetén* $\{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \}$ *is lineárisan független!*

Megoldás: Felhasználjuk, hogy független rendszer része is független (ez nyilvánvaló a definícióból), továbbá, ha egy független rendszerhez egy elemet hozzávéve összefüggő rendszert kapunk, akkor az új elem előáll a régiek lineáris kombinációjaként (ugyanis van egy nem triviális kombináció, és abban az új elem együtthatója nem lehet 0). Így a feltételekből következik, hogy $\mathbf{e} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ és $\mathbf{e} = u\mathbf{c} + v\mathbf{d}$ valamely x, y, z, u, v skalárokra. De akkor $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+y\mathbf{c}=u\mathbf{c}+v\mathbf{d}$, azaz $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+(z-u)\mathbf{c}-v\mathbf{d}=\mathbf{0}$. Az $\{\,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\,\}$ halmaz függetlensége miatt ebből $x=y=z-u=-v=0$ következik, tehát $\mathbf{e}=u\mathbf{c}+v\mathbf{d}=u\mathbf{c}$, ahol $\mathbf{e}\neq\mathbf{0}$ miatt $u\neq 0$. De akkor $\{\,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d},\mathbf{e}\,\}=\{\,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d},\frac{1}{u}\mathbf{c}\,\}$ független (az utóbbinak bármely nem triviális lineáris kombinációja egyúttal az $\{\,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\,\}$ rendszernek is nem triviális kombinációja).

5. *Legyenek megadva az alábbi mátrixok:*

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix},B=[-1\quad -2\quad -3],C=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}-1&2\\2&3\\3&4\end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A+A,\quad A+B,\quad AB,\quad AC,\quad AC+2C,\quad AD-3D,\quad D^2,\quad BC,\quad CB.\quad B+C^T$$

Megoldás: Nem lehet az $A+B$, AB és D^2 műveleteket elvégezni. $A+A=\begin{bmatrix}2&4&6\\4&6&8\\6&8&10\end{bmatrix}$,

$AC=\begin{bmatrix}12\\16\\20\end{bmatrix}$, $AC+2C=\begin{bmatrix}10\\20\\26\end{bmatrix}$, $AD-3D=\begin{bmatrix}15&14\\10&20\\11&26\end{bmatrix}$, $CB=\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&-4&-6\\-3&-6&-9\end{bmatrix}$

$BC=[-12]$, $B+C^T=[-2\quad 0\quad 0]$

6. *Tetszőleges $n>1$-re adjunk meg olyan $n\times n$-es A és B valós mátrixokat, melyekre $AB=0$, és $BA\neq 0$.*

Megoldás: $n=2$-re $A_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ és $B_2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ ilyen. Tetszőleges n-re A_n legyen az az $n\times n$-es mátrix, aminek a bal felső sarka A_2 és a többi eleme 0, és hasonlóan kapjuk B_n-et B_2-ből.

7. *Keressünk olyan A,B,C,D valós négyzetes mátrixokat, melyekre:*

a) $A^2=I$ *és* $A\neq\pm I$; *b)* $B^2=0$ *és* $B\neq 0$; *c)* $D^2=D$ *és* $D\neq 0,I$.

Megoldás: a) $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

8. *Mi történik egy $n\times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&1&\dots&0\\1&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}$$

Megoldás: A-val balról: az első sor szorzódik 3-mal,
A-val jobbról: az első oszlop szorzódik 3-mal,
B-vel balról: a második sor kétszerese hozzáadódik az első sorhoz,
B-vel jobbról: az első oszlop kétszerese hozzáadódik a második oszlophoz,
C-vel balról: az első és a második sor helyet cserél,
C-vel jobbról: az első és a második oszlop helyet cserél.

9. *Igazak-e minden $n \times n$-es $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mátrixra az alábbi egyenlőségek?*

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$; *b)* $(\mathbf{A}+\mathbf{I}_n)(\mathbf{A}-\mathbf{I}_n) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I}_n^2$;
c) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$; *d)* $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$.

Megoldás: a), c): Nem igazak, csak amikor $AB = BA$.
b): Igaz. d) $(AB)^T = B^T A^T$, tehát általában a d) állítás sem igaz, csak amikor $AB = BA$.

Hf1. *Legyenek a, b és c az $x^3 + 2x^2 - 5$ polinom gyökei. Számítsuk ki $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ értékét!*

Hf2. *Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ban végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely három lineárisan független!*

Hf3. *Össze lehet-e szorozni valamilyen sorrendben a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokat, hogy a szorzat ne a nulla mátrix legyen?*