1. *Hány megoldása van azoknak az egyenletrendszereknek a valós számok körében, amelyeknek a bővített mátrixa a következő redukált lépcsős alakra hozható? Amelyiknek több megoldása is van, annak adjuk meg legalább három különböző megoldását!*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Megoldás: Végtelen sok, 1, 0, illetve végtelen sok. Az elsőnek az általános megoldása $\begin{bmatrix} 1-2t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix}$, tehát pl. $t=-1,0,1$-re megoldások $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. A negyediknek az általános megoldása $\begin{bmatrix} t \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, tehát megoldásai például $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:*

a)
$$\begin{aligned} x+2y-z&=2 \\ 3x-y+2z&=7 \\ x-z&=-2 \\ 2x+y+z&=7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x+y+z&=4 \\ -x+y-z&=2 \\ 2x+y+2z&=1 \\ 4x+4y+4z&=1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ -x+y-z&=1 \\ 2x+y+2z&=1 \\ 4x+4y+4z&=4 \end{aligned}$$

Megoldás: a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Így a megoldás $x=1$, $y=2$, $z=3$.

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right],$$

és a 4. sorból már most látszik, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása, így nem kell elmenni a lépcsős alakig.

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

tehát a megoldás $x=-t$, $y=1$, $z=t$, vagy vektorosan $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. *Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk is meg a megoldásokat ezekben az esetekben!*

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=4 \\ x+2y-z&=-1 \\ x-y+2z&=a \\ x+by+z&=3 \end{aligned}$$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 1 & -1 & 2 & | & a \\ 1 & b & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & 2 & | & a \\ 1 & b & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 6 \\ 0 & -3 & 3 & | & a+1 \\ 0 & b-2 & 2 & | & 4 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & a-5 \\ 0 & 0 & b & | & 2b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & b & | & 2b \\ 0 & 0 & 0 & | & a-5 \end{bmatrix}$$

Ha $a \neq 5$, akkor nincs megoldás. Ha $a = 5$ és $b = 0$, akkor a mátrix már redukált lépcsős alakban van, a megoldások száma végtelen, és a megoldások $x = 3 - t$, $y = -2 + t$, és $z = t$, ahol t tetszőleges. Ha viszont $a = 5$, és $b \neq 0$, akkor tovább alakíthatjuk a mátrixot:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

tehát ekkor a megoldás egyértelmű: $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$.

4. *Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.*

a) Ha $k \leq n$, akkor az egyenletrendszernek létezik megoldása.
b) Ha $k > n$, akkor az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.
c) Ha $k < n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.
d) Ha $k > n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak egy megoldása van.
e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.

Megoldás: a) Nem igaz, pl. $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$ ellentmondásos.
b) Nem igaz, pl. $x + y = 1$, $2x + 2y = 2$, $3x + 3y = 3$.
c) Igaz.
d) Nem igaz, erre is jó ellenpélda a b) megoldásában szereplő.
e) Igaz: a Gauss-módszernél a mátrix együtthatói $\mathbb{Q}$-ban maradnak, és így az általános megoldás felírásánál is csupa racionális együttható szerepel. Tehát ha egyértelmű a megoldás, akkor az racionális, ha nem, akkor a paramétereket $\mathbb{Q}$-belinek választva szintén racionális megoldást kapunk (végtelen sokat, ha a valós megoldások száma végtelen).

5. *Állapítsuk meg, függetlenek-e a megadott vektorhalmazok $\mathbb{R}^n$-ben. Ha nem, keressünk köztük maximális számú független vektort, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként! Benne van-e a külön megadott vektor a vektorhalmaz által generált altérben?*

a) $\{(1,2,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,-2,-1),(0,1,2,1)\}$, $\mathbf{v} = (-1,0,1,3)$
b) $\{(1,2,1),(0,1,3),(1,-1,0)\}$, $\mathbf{v} = (1,1,1)$

Megoldás: a) A függetlenek keresését és a $\mathbf{v}$ előállítását egy sorredukcióval is megoldhatjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 5 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Ebből leolvasható, hogy $\mathbf{v}$ nem áll elő a többiek lineáris kombinációjaként, a vezéregyeseket tartalmazó oszlopoknak megfelelő eredeti oszlopvektorok (tehát $[1 \quad 2 \quad -1 \quad 0]^T$, $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$, és

$[0\quad 1\quad 2\quad 1]^T$ bázist alkotnak az oszloptérben, és a többi vektor oszlopának megfelelő oszlopok a redukált lépcsős alakban megmutatják, hogy azok hogyan állnak elő a kiválasztott oszlopokból: $(0,1,-2,-1)=(1,2,-1,0)-(1,1,1,1)$.

b) Hasonlóan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto\mapsto\mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/8 \end{array}\right]$$

Tehát a három megadott vektor független, és előállítható belőlük a $\mathbf{v}$ vektor (az utóbbi abból is következik, hogy a háromdimenziós térben három független vektor szükségképpen bázist alkot.

6. *Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ lineárisan független vektorok egy vektortérben. Függetlenek-e a következő vektorok? Ha nem függetlenek, hány dimenziós alteret generálnak?*

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_n$

b) $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}-\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n-\mathbf{v}_1$

c) $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n+\mathbf{v}_1$

Megoldás: a) Függetlenek. Ezt bebizonyíthatjuk azzal, hogy az $x_1\mathbf{v}_1+x_2(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+\ldots+x_n(\mathbf{v}_1+\ldots+\mathbf{v}_n)=\mathbf{0}$, azaz $(x_1+\ldots+x_n)\mathbf{v}_1+(x_2+\ldots+x_n)\mathbf{v}_2+\ldots+x_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ vektoregyenlet a $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ függetlensége miatt ekvivalens az $x_1+\ldots+x_n=0,\ x_2+\ldots+x_n=0,\ \ldots,\ x_n=0$ egyenletrendszerrel, amely eleve lépcsős alakú, és láthatóan csak egy, a triviális megoldása van. De abból is következik a függetlenség, hogy a megadott vektorok nyilván valóan kigenerálják a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ vektorokat (ebben a sorrendben elő tudjuk állítani belőlük), tehát generátorrendszert alkotnak a $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ független vektorok által generált n-dimenziós térben, itt pedig egy n elemű generátorrendszer szükségképpen bázis is.

b) A vektorok összege $\mathbf{0}$, tehát nem függetlenek. Az első $n-1$ vektor viszont független, ugyanis az a) részhez hasonlóan felírhatjuk, az $x_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)+\ldots+x_{n-1}(\mathbf{v}_{n-1}-\mathbf{v}_n)=\mathbf{0}$ vektoregyenlethez tartozó lineáris egyenletrendszert $x_1,\ldots,x_{n-1}$-re: $x_1=0,\ x_2-x_1=0,\ldots, x_{n-1}-x_{n-2}=0,\ x_{n-1}=0$, aminek nyilván csak triviális megoldása van. Így a generált altér $n-1$ dimenziós.

c) Ha n páros, akkor összefüggők a vektorok, mert a váltott előjeles összegük 0. Ebben az esetben az első $n-1$ vektor függetlenségét a b) esethez hasonló módon be tudjuk látni, tehát a generált altér ebben az esetben $n-1$ dimenziós. Ha viszont n páratlan, akkor az $x_1(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+\ldots+x_n(\mathbf{v}_n+\mathbf{v}_1)=\mathbf{0}$ vektoregyenlethez tartozó $x_n+x_1=0,\ \ x_1+x_2=0,\ldots, x_{n-1}+x_n=0$ egyenletrendszert lépcsős alakra hozva látjuk, hogy a mátrix főátlójában $1,1,\ldots,1,2$ van. Tehát csak triviális megoldása van az egyenletrendszernek, azaz az n vektor független a testben $2\neq 0$. De például a kételemű $\mathbb{Z}_2$ test fölötti vektortérben összefüggő az n vektor. Az első $n-1$ vektor ekkor is független.

7. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét, ha van! Mi a determinánsa a megadott mátrixoknak?*

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&2&1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$[A\mid I]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right]\mapsto\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right]\mapsto\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]=[I\mid A^{-1}],$$

tehát $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. A determinánsa $1\cdot4-2\cdot3=-2$.

B determinánsa 0, mert van két összefüggő sora, és így nem is invertálható (ha Gauss-módszerrel elkezdjük kiszámítani az inverzét, ellentmondásos egyenletrendszerre jutunk).

C determinánsát Gauss-módszerrel kiszámítva:

$$[C\mid 0]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\3&4&6&0&0&1\end{array}\right]\mapsto\mapsto\mapsto\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&0&0&3&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]=[I\mid C^{-1}].$$

C determinánsa -1.

$|D| = -4$, és $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.

8. *Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket, ha lehet! A, B, C, D a 7. feladatban szereplő mátrixok.*

a) $CX = D$ *b)* $BX = C$ *c)* $XB = M$, *ahol* $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $XB = AM$

Megoldás: a) Szimultán egyenletrendszerként megoldva:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right], \text{ tehát } X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Az előzőhöz hasonlóan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

és már itt a második sorból látszik, hogy nincs megoldás.

c) Az eredeti helyett a transzponáltját tudjuk szimultán egyenletrendszerként megoldani: $B^T X^T = M^T$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Így X^T első oszlopa $\begin{bmatrix} 4-2t \\ t \\ -1 \end{bmatrix}$, a második $\begin{bmatrix} -1-2s \\ s \\ 2 \end{bmatrix}$, ahol t, s tetszőlegesek. Tehát $X = \begin{bmatrix} 4-2t & t & -1 \\ -1-2s & s & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

d) Mivel A invertálható, $XB = AM$ akkor és csak akkor, ha $A^{-1}XB = M$, tehát a c)-beli mátrixegyenlet megoldásait A-val balról megszorozva megkapjuk ennek az egyenletnek a megoldásait: $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Hf1. *Adjunk meg egy olyan három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, amelynek nincs megoldása, de bármely két egyenletnek van közös megoldása.*

Hf2. *Oldjuk meg az $AX = B$ mátrixegyenletet, ahol* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *és* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Hf3. *Keressünk olyan vektort az $\mathbb{R}^4$ vektortérben, amely az $(1,2,-1,0), (1,1,1,1), (0,1,-1,3)$ vektorokkal együtt bázist alkot.*