1. *Hogyan változik egy $n \times n$-es mátrix determinánsa, ha tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére? Hát ha elforgatjuk 90, 180, ill. 270 fokkal?*

Megoldás: Ha a függőleges vagy vízszintes középvonalra tükrözzük, az megfelel $\left[\frac{n}{2}\right]$ sor-, illetve oszlopcserének, tehát $(-1)^{[n/2]}$-vel szorzódik a determináns. A főátlóra való tükrözés a transzponálás, az nem változtatja meg a determinánst. A mellékátlóra való tükrözésnél a mátrix soraiból oszlopok lesznek, de ellenkező sorrendben, és maguk az oszlopok is megfordítva vannak. Tehát ezt az előző három tükrözés egymásutánjával kaphatjuk, és így nem változik az előjele.

A 90°-os forgatás a sorokat oszlopokká írja át, és fordított sorrendben írja a mátrixba, tehát egy transzponálással és $\left[\frac{n}{2}\right]$ oszlopcserével kapjatjuk. Ez a determinánst $(-1)^{[n/2]}$-szel szorozza. A többi forgatás ennek hatványa, így a 180°-os forgatás nem változtatja meg a determinánst, a 270°-os pedig szintén $(-1)^{[n/2]}$-szel szorozza.

2. *Mi egy $n \times n$-es mátrix ($n \geq 3$) determinánsának az értéke, ha a mátrix minden sora számtani sorozat?*

Megoldás: Tegyük fel, hogy az i. sor a_i-vel kezdődő, d_i különbségű számtani sorozat $i = 1, \ldots, n$-re. Vonjuk ki az első oszlopot az összes többiből! Az új j. oszlop i. eleme $(j-1)d_i$, tehát a második oszlopnak skalárszorosai az utána következő oszlopok. Ebből következik, hogy a determináns 0.

3. *Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & n \end{vmatrix}$

Megoldás: a) A mátrix csak akkor lehet ilyen, ha n páratlan. A mátrixot az egységmátrixszá alakíthatjuk, ha először az utolsó sort felvisszük a 2. helyre ($n-2$ sorcsere), aztán az eredetileg utolsó előtti, de most utolsó sort a 4. helyre ($n-4$ sorcsere), aztán a most utolsót a 6. helyre, és így tovább, a végén az utolsó helyen álló sort az $n-1$-edik helyre (1 sorcsere). Ez összesen $1+3+\ldots+(n-2) = \frac{(n-1)^2}{4}$ sorcsere, ami pontosan akkor páros, ha $\frac{n-1}{2}$ páros. Tehát a determináns $(-1)^{(n-1)/2}$, azaz 1, ha $n = 4k+1$ alakú, és -1, ha $n = 4k+3$ alakú.

b) Ha $n \geq 3$, akkor van két egyforma sor, tehát a determináns 0 (elemi sorművelettel **0** sort állíthatunk elő benne). $n = 1$-re a determináns 1, $n = 2$-re pedig -1.

c) Vonjuk ki a második sort az összes többiből, aztán az első sor kétszeresét adjuk hozzá a másodikhoz. Ekkor felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek átlójában rendre $-1, 2, 1, 2, 3, \ldots, n-2$ áll, tehát a determináns $-2 \cdot (n-2)!$.

4. *Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?*

Megoldás: $\frac{32}{3}$, $\frac{1}{96}$, illetve 9.

5. *Bizonyítsuk be, hogy az alábbi mátrix determinánsa $\prod\limits_{i>j} (a_i - a_j)$.*

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ & & & \ldots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Megoldás: Jelöljük ezt a mátrixot $V(a_1, \ldots, a_n)$-nel (Vandermonde-mátrix). Teljes indukcióval beláthatjuk, hogy a determináns $\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$-vel egyenlő. $n = 1$-re az üres szorzat 1, $n = 2$-re $a_2 - a_1$, tehát ezekre igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re igaz. Hátulról előre haladva minden oszlopból vonjuk ki az előző a_1-szeresét, aztán fejtsük ki a determinánst az első sora szerint. Az így kapott determináns $(j-1)$. sorából $(a_j - a_1)$-et kiemelve azt kapjuk, hogy $|V(a_1, \ldots, a_n)| = \prod\limits_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \cdot |V(a_2, \ldots, a_n)| =$

$\prod_{j=2}^{n}(a_j - a_1)\prod_{2\le i<j\le n}(a_j - a_i) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)$. Fontos tulajdonsága ennek a determinánsnak, hogy nem lehet 0, ha $a_1, \dots, a_n$ különbözők.

6. *A Cramer-szabály segítségével számítsuk ki y értékét, ha x, y és z kielégítik a következő egyenletrendszert.*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Megoldás: $y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{-20}{-15} = \frac{4}{3}$

7. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-ben n vektor akkor és csak akkor alkot bázist, ha az n vektorból mint oszlopokból alkotott mátrix determinánsa nem 0.*

Megoldás: Az n oszlop akkor és csak akkor alkot bázist az n-dimenziós vektortérben, ha lineárisan függetlenek, azaz ha a mátrixhoz mint együtthatómátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszenek csak triviális megoldása van. Ez viszont pontosan akkor igaz, ha a mátrix redukált lépcsős alakjában minden oszlopban van vezéregyes, vagy ezzel ekvivalens feltétellel, nincs benne 0 sor. Mivel az elemi sorműveletek nulla determinánst nulla determinánsba, nem nullát nem nullába visznek, ebből következik, hogy akkor és csak akkor függetlenek az oszlopok, ha a determináns nem nulla.

8. *Számítsuk ki a következő (valós) mátrixok rangját (ahol paraméter van, ott annak függvényében)! Adjunk meg annyi független sort, és annyi független oszlopot, mint amennyi a mátrix rangja!*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 2 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

Megoldás: a) Ha a második sort kivonjuk az alatta levőkből, a harmadikkal kinullázhatjuk a többit, tehát a mátrix megmaradt nemnulla sorai:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \end{bmatrix},$$

így a rang 3. A mátrix első három oszlopa független, mert a lépcsős alak első három oszlopában van vezérelem, és az első három sor is független, mert a sorműveleteknél az első három sor által generált altér nem változott (ezekhez a sorokhoz nem adtunk hozzá más sornak többszörösét, és nem is cseréltük ki azokkal).

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így a rang 2, az első két oszlop független, és láthatóan az első két sor is (egyik sem skalárszorosa a másiknak).

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & b-a & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & b-a-1 & 1-b \end{bmatrix}$$

Ez lépcsős alak, és legföljebb a harmadik sor lehet $\mathbf{0}$. Ha $b = 1$ és $a = 0$, akkor a rang 2, és az első két oszlop, illetve az első két sor független. Ha $b \neq 1$ vagy $a \neq 0$, akkor a rang 3, és az első három oszlop független, és természetesen a három sor is.

d) A mátrix rangja akkor kisebb 3-nál, ha a determinánsa, azaz $x^3 - 3x + 2$ nulla, ez pedig $x = 1$ és $x = -2$ esetén igaz. $x = 1$ esetén a csupa-1 mátrixot kapjuk, ami nyilván 1 rangú. $x = -2$ esetén a mátrix 2 rangú, és az első két sor, illetve az első két oszlop független. Minden más esetben a rang 3.

9. *Legyen* $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,2)\}$ *az* $\mathbb{R}^3$ *vektortér egy bázisa. Adjuk meg a* $(3,2,1)$ *vektor koordinátáit a* $\mathcal{B}$ *bázisban, és határozzuk meg azt az elemét* $\mathbb{R}^3$*-nek, amelynek koordinátavektora a* $\mathcal{B}$ *bázisban* $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Megoldás: A standard bázisról a $\mathcal{B}$ bázisra való áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{v} = (3,2,1)$-re $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Ha $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{w}$ standard bázisban való felírása $P\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, azaz $\mathbf{w} = (2,3,-2)$.

Hf1. *Benne van-e a* $\mathbf{v} = (1,1,0)$ *vektor az* $\mathbf{a} = (1,-1,2)$*,* $\mathbf{b} = (3,1,1)$*,* $\mathbf{c} = (1,3,-3)$ *vektorok által kifeszített altérben? Ha igen, fejezzük ki* $\mathbf{v}$*-t az* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$*,* $\mathbf{c}$ *vektorok lineáris kombinációjaként, ha nem, keressünk olyan* $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ *vektort, amely* $\mathbf{v}$*-től minél kevesebb komponensben tér el.*

Hf2. *Számítsuk ki annak az* $n \times n$*-es determinánsnak az értékét, amelynek főátlójában csupa* 1*-es, a mellékátló főátlón kívüli részén csupa* 2*-es, mindenhol máshol pedig* 0 *áll.*

Hf3. *Mik a lehetséges értékei annak a* 4×4*-es determinánsnak, amelynek csak* 0 *és* 1 *elemei vannak, és ezek közül legföljebb öt* 1*-es?*