1. *Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.*

a) az $\mathbb{R}^2$ sík tükrözése az $x = 2$ egyenesre;
b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x, y, z)) = (x + y, x + y)$;
c) az a leképezés, amely minden $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz a hosszát rendeli;
d) a 2×2-es valós mátrixokon a mellékátlóra való tükrözés;
e) a komplex konjugálás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
f) egy adott $a + bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
g) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

Megoldás: a) Nem lineáris, mert $\mathbf{0}$ nem $\mathbf{0}$-ba megy.

b) Lineáris, mert egy mátrixszal való balszorzással lehet megvalósítani: $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix}$ az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixra. Ez az A mátrix a transzformáció standard mátrixa.

c) Nem lináris: $|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \neq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$, kivéve, amikor $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ egyirányúak.

d) Lineáris: $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d+h & b+f \\ c+g & a+e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & f \\ g & e \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$.

A mátrixa az $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ standard bázisban $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, mert a transzformáció az első és a negyedik báziselemet felcseréli, a másodikat és a harmadikat pedig helyben hagyja.

e) A linearitás következik a konjugálás műveleti tulajdonságaiból. A mátrixa a standard $\{ 1, i \}$ bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

f) A komplex számok műveleti tulajdonságaiból következik, hogy a leképezés lineáris. Mivel $f(x + yi) = (x + yi)(a + bi) = (ax - by) + (bx + ay)i$ a leképezés, a mátrixa az $\{ 1, i \}$ bázisban $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

g) A leképezés $\mathbb{R}^2$-en mint a komplex számsíkon a $\cos\alpha + i \sin\alpha$ számmal való szorzásként hat, tehát az f) rész szerint lineáris, és a mátrixa $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

2. *Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisban, illetve bázispárban:*

a) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$;
b) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$;
c) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}$;
d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, amelyre $\varphi(1, 2, 1) = (0, 2, 1)$, $\varphi(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $\varphi(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$, a standard bázisban;
e) $p(x) \mapsto p'(x)$ a legföljebb másodfokú valós polinomok terén, a standard $\{ 1, x, x^2 \}$ bázisban;
f) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x + y, y, x)$, $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (2, 0)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ bázispárban;
g) Az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard bázisban.

Megoldás: a) $(1, 0) \mapsto (0, 1)$, és $(0, 1) \mapsto (1, 0)$, így a mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $(1, 0) \mapsto (0, 1) = -1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1)$, és $(1, 1) \mapsto (1, 1) = 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1)$, így a mátrix $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Másképp: az áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, és így a transzformáció mátrixa az új bázisban az a) részben megtalált standard A mátrixot használva $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$/

c) Az áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, a $\mathcal{B}$-ben felírt mátrix $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$.

d) Azt az A mátrixot keressük, amelyre $A\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, és $A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$, vagyis az $A\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\2&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ mátrixegyenletet kell megoldani. A megoldása $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\2&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-1&3\\0&2&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

e) $a+bx+cx^2\mapsto b+2cx$, ezért a leképezés $\{1,x,x^2\}$ bázisban felírt A mátrixára $A\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\2c\\0\end{bmatrix}$.

Tehát $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$.

Másképp: $1\mapsto 0=0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2$, $x\mapsto 1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2$, és $x^2\mapsto 0\cdot 1+2\cdot x+0\cdot x^2$, tehát a báziselemek képének koorodinátavektorai $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$; ezek a keresett A mátrix oszlopai.

f) A leképezés standard mátrixa $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$, az $\mathbb{R}^2$ új bázisára való áttérés mátrixa $P=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix}$, az $\mathbb{R}^3$ új bázisára való áttérés mátrixa $Q=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$. Az új bázispárban a mátrix $Q^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\-1&-2\\0&2\end{bmatrix}$.

Másképp: $(1,1)\mapsto(2,1,1)=1\cdot(1,2,1)-1\cdot(-1,1,0)+0\cdot(0,1,1)$, és $(2,0)\mapsto(2,0,2)=0\cdot(1,2,1)-2\cdot(-1,1,0)+2\cdot(0,1,1)$, így a koordinátavektorokból mint oszlopokból álló mátrix $\begin{bmatrix}1&0\\-1&-2\\0&2\end{bmatrix}$.

g) Az $x-2y+z=0$ sík normálvektora $\mathbf{n}=(1,-2,1)$, és így egy $\mathbf{v}$ vektornak a síkra vett merőleges vetülete $\mathbf{v}-\frac{\mathbf{vn}}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. Ezt egy (x,y,z) tetszőleges vektorra felírva azt kapjuk, hogy a vetítés az (x,y,z) pontot az $(x,y,z)-\frac{x-2y+z}{6}(1,-2,1)=(\frac{5}{6}x+\frac{2}{6}y-\frac{1}{6}z,\frac{2}{6}x+\frac{2}{6}y\frac{2}{6}z,-\frac{1}{6}x+\frac{2}{6}y+\frac{5}{6}z)$ pontba viszi. Tehát a transzformáció standard mátrixa $\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{bmatrix}$.

3. *Számítsuk ki az $f:(x,y,z)\longmapsto(x+y-2z,x+z,2x+y-z,-x-z)$ leképezés mátrixának a rangját! Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!*

Megoldás: A leképezés standard mátrixa $A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&0&1\\2&1&-1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$. Hozzuk ezt Gauss-módszerrel redukált lépcsős alakra!

$$\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&0&1\\2&1&-1\\-1&0&-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&-1&3\\0&-1&3\\0&1&-3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Ebből leolvasható, hogy a mátrix rangja 2, mert a lépcsős alakban két nem nulla sor van. A képtér a mátrix oszloptere, és ennek bázisát adja az A mátrix első két oszlopa, $(1,1,2,-1)^T$ és $(1,0,1,0)^T$, mert a lépcsős alakban az első két oszlopban vannak a vezérelemek. A magtér pedig az $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldástere. Ezt is leolvashatjuk a lépcsős alakból (a konstans oszlop végig $\mathbf{0}$

marad a sorredukció során): $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$, és ennek bázisát adja a $(-1, 3, 1)^T$ vektor.

4. *Adjunk meg olyan lineáris transzformációt az $\mathbb{R}^3$ vektortéren, amelyre*
a) $0 \neq \operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Im}\varphi$;
b) $\operatorname{Ker}\varphi$ 1 *dimenziós, és* $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;
c) $\operatorname{Im}\varphi$ 2 *dimenziós, és* φ *az* $\operatorname{Im}\varphi$ *minden vektorát önmagába viszi;*
d) $\varphi^3 = 0$, *de* $\varphi^2 \neq 0$.

Megoldás: a) A dimenziótétel miatt $\dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = 3$, tehát csak úgy teljesülhetnek a megadott feltételek, ha $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 1$, és $\dim\operatorname{Im}\varphi = 2$. Ezt megvalósíthatjuk például úgy, ha az $\mathbb{R}^3$ standard bázisára $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2$. A bázison egyértelműen megadható egy lineáris transzformáció, tehát ez meghatároz egy φ leképezést, és könnyen leolvasható, hogy ennek e képe kétdimenziós ($\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$), és a mag tartalmazza az $\mathbf{e}_1$-et, a dimenziótétel miatt pedig ekkor csak $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ lehet.

b) Az előzőhöz hasonlóan $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 1$ miatt $\dim\operatorname{Im}\varphi = 2$, tehát a leképezés megadását hasonlóan kezdhetjük, de a második két báziselem képét úgy választjuk, hogy $\mathbf{e}_1$ ne legyen benne a képek generátumában: $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_3$; vagy például $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2$, csak az utóbbinál kevésbé szembetűnő, hogy kielégít minden feltételt.

c) A b)-ben megadott $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_3$ transzformáció ezt a feltételt is kielégíti. De bármely origón átmenő síkra való (nem feltétlenül merőleges) vetítés is ilyen, sőt pontosan azok a transzformációk elégítik ki a feltételeket.

d) Az $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2$ leképezés megfelel: ez a báziselemeket egy indexszel előrébb tolja, az elsőt pedig $\mathbf{0}$-ba viszi. Tehát φ^2 képe már csak $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$, φ^3 képe pedig $\{\mathbf{0}\}$.

5. *A mátrix felírása nélkül állapítsuk meg, mik a (valós) sajátértékei és sajátvektorai a következő lineáris transzformációknak:*
a) $\mathbb{R}^3$ *tükrözése az* $(1, 2, 2)$ *vektorra merőleges, az origón átmenő síkra;*
b) $\mathbb{R}^3$ $90°$*-os elforgatása az* x *tengely körül;*
c) $\mathbb{R}^2$ *merőleges vetítése az* $y = 2x$ *egyenesre;*
d) az $(1, 0, 2)$ *vektorral való vektoriális szorzás* $\mathbb{R}^3$*-ben;*

Megoldás: a) A normálvektor, $(1, 2, 2)$, és ennek skalárszorosai $\lambda = -1$-hez tartozó sajátvektorok, a sík nem nulla vektorai pedig $\lambda = 1$-hez tartozók. Más sajátvektora nincs a transzformációnak: a többi nem nulla vektor képe nem párhuzamos az eredeti vektorral.

b) Csak az x tengellyel párhuzamos nem nulla vektorok sajátvektorok (1 sajátértékkel).

c) Az egyenessel párhuzamos nem null vektorok ($(1, 2)$ nem nulla skalárszorosai) az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok, az egyenesre merőlegesek ($(-2, 1)$ nem nulla skalárszorosai) 0-hoz tartozó sajátvektorok.

d) Csak az $(1, 0, 2)$ vektor nem nulla skalárszorosai lesznek sajátvektorok, a hozzájuk tartozó sajátérték 0.

6. *Keressük meg az alábbi mátrixok összes (komplex) sajátértékét és sajátvektorát! Írjuk le az* $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$ *leképezések hatását* $\mathbb{R}^2$*-ben!*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 1$, a sajátértékek ± 1, az 1-hez tartozó sajátvektorok $t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(t \neq 0)$, a -1-hez tartozók $t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $(t \neq 0)$. Ez a leképezés az $(1, 1)$ vektort önmagába viszi, a $(-1, 1)$-et pedig -1-szeresébe, tehát ez az $y = x$ egyenesre való tükrözés.

$|B - \lambda I| = \lambda^2 + 1$, a sajátértékek $\pm i$, a sajátvektorok $t \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, illetve $t \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$. Ez a leképezés az $\mathbf{i}$ vektort $\mathbf{j}$-be, a $\mathbf{j}$ vektort pedig $-\mathbf{i}$-be viszi, tehát ez a $90°$-os forgatás $\mathbb{R}^2$-en. Ennek a valós síkon nincs sajátvektora, de mint láttuk $\mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ leképezésként van.

$|C-\lambda I| = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, a sajátértékek 1 és 2, a sajátvektorok $t\cdot\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$, illetve $t\cdot\begin{bmatrix}-3\\-1\\2\end{bmatrix}$ $(t\neq 0)$.

$|D-\lambda I| = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = -(\lambda-1)\lambda$, a $\lambda=1$-hez tartozó sajátvektorok $s\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}$ (vagyis az 1-hez tartozó sajátaltér kétdimenziós), a $\lambda=0$-hoz tartozók pedig $t\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $(t\neq 0)$

7. *Melyek igazak egy A négyzetes mátrixra? Amelyik igaz, azt bizonyítsuk, amelyik nem, arra adjunk ellenpéldát.*

a) $\mathbf{v}$ *sajátvektora A-nak* $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ *sajátvektora A^2-nek;*
b) $\mathbf{v}$ *sajátvektora A^2-nek* $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ *sajátvektora A-nak;*

Megoldás: a) Igaz: Ha $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$, akkor $A^2\mathbf{v}=A(\lambda\mathbf{v})=\lambda A\mathbf{v}=\lambda^2\mathbf{v}$. Tehát ha $\mathbf{v}$ az A sajátvektora λ sajátétékkel, akkor $\mathbf{v}$ az A^2-nek is sajátvektora λ^2 sajátértékkel.

b) Nem igaz, például az $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ mátrixra (az $y=x$ egyenesre való tükrözésre) $A^2=1$, tehát A^2-nek minden nem nulla vektor sajátvektora, de ugyanez nem igaz A-ra.

Hf1. *Hány olyan 1 rangú 3×3-as valós mátrix van, amelynek minden eleme 0 vagy 1?*

Hf2. *Írjuk fel az $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{v})=\mathbf{v}\times(1,0,2)$ lineáris transzformáció standard mátrixát! Adjuk meg a magtérnek és a képtérnek egy-egy bázisát!*

Hf3. *Adjuk meg az $f(x,y,z)=(y-z, x+y+2z, 3x+2y-z)$ lineáris transzformáció mátrixát a $\mathcal{B}=\{(1,-1,1),(-1,2,3),(1,-1,-3)\}$ bázisban!*