1. *Melyik mátrixok diagonalizálhatók $\mathbb{C}$ fölött a következők közül?* $A^n = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A sajátértékei 1 és 2, az hozzájuk tartozó sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ skalárszorosai. A sajátvektorokból alkotható bázisra való áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, és ezzel $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ diagonális, tehát A diagonalizálható. $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1-2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

B egyetlen sajátértéke -1, és a -1-hez tartozó sajátaltér csak egydimenziós ($\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ skalárszorosai), így nem lehet sajátvektorokból bázist alkotni, vagyis B nem diagonalizálható. (Egyébként ezt a sajátvektorok kiszámítása nélkül is láthatjuk: ha a sajátaltér kétdimenziós lenne, akkor az az egész $\mathbb{C}^2$ lenne, tehát a mátrix minden vektort a -1-szeresébe vinne, és így csak a $-I$ mátrix lehetne.)

C karakterisztikus polinomja $-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1$, aminek három különböző gyöke van. Mivel minden gyökhöz tartozik legalább egy sajátvektor, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek, a sajátvektorokból összeállítható egy bázis, vagyis C diagonalizálható.

D karakterisztikus polinomja $-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$. A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér (a $(D-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldástere) kétdimenziós, és a -2-höz tartozó sajátvektor szükségképpen független tőle, tehát az 1 sajátalterének két bázisvektora egy a -2-höz tartozó sajátvektorral együtt bázist alkot, ezért D diagonalizálható.