1. Legyen $H = \{(1,2,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,-2,-1),(0,1,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$, és $\mathbf{v} = (-1,0,1,0)$.

a) Állapítsuk meg, hogy $\mathbf{v}$ benne van-e a $\langle H \rangle$ altérben, és ha igen, adjuk meg $\mathbf{v}$ összes előállítását a négy vektor lineáris kombinációjaként!

b) Lineárisan független-e a H vektorhalmaz? Ha nem, válasszunk ki belőle maximális számú független vektort, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként!

2. Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.

a) az $\mathbb{R}^2$ sík tükrözése az $x = 2$ egyenesre;

b) a 2×2-es mátrixok terén a transzponálás;

c) az a leképezés, amely minden $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz a hosszát rendeli;

d) a konjugálás $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$-ben;

e) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

3. Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisban, illetve bázispárban:

a) $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} \times (1,2,-1)$ a standard bázisban;

b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$;

c) $p(x) \mapsto p'(x)$ a legföljebb másodfokú valós polinomok terén, a standard $\{1, x, x^2\}$ bázisban;

4. Számítsuk ki az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ leképezés rangját, ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!