1. A mátrix felírása nélkül állapítsuk meg, mik a (valós) sajátértékei és sajátvektorai a következő lineáris transzformációknak:

a) $\mathbb{R}^3$ tükrözése az $(1,2,2)$ vektorra merőleges, az origón átmenő síkra;
b) $\mathbb{R}^3$ $90°$-os elforgatása az x tengely körül;
c) $\mathbb{R}^2$ merőleges vetítése az $y=2x$ egyenesre;
d) az $(1,0,2)$ vektorral való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ben;

2. Keressük meg az alábbi mátrixok összes (komplex) sajátértékét és sajátvektorát! Írjuk le az $\mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x}$ leképezés hatását $\mathbb{R}^3$-ben!

$$A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}4&-4&1\\1&-1&0\\-2&4&1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}3&1&-3\\0&1&0\\2&1&-2\end{bmatrix}$$

3. Melyik mátrixok diagonalizálhatók $\mathbb{R}$ fölött a következők közül? $A^n=?$

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1&1\\-4&-3\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}-3&4&4\\-2&3&3\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}1&6&0\\0&-2&0\\0&-3&1\end{bmatrix}$$

4. Mi a Jordan-normálalakja annak a mátrixnak, amelynek karakterisztikus polinomja $k(x)=-(x-1)^2(x-2)^3$ és a minimálpolinomja $m(x)=(x-1)(x-2)^2$?

5. Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-normálalakja?

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}; \qquad \text{b)}\ \begin{bmatrix}2&3&9\\0&0&0\\0&0&-5\end{bmatrix}; \qquad \text{c)}\ \begin{bmatrix}2&3&9\\0&2&0\\0&0&-5\end{bmatrix}.$$

6. Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók az $M=\begin{bmatrix}1&3\\0&-1\end{bmatrix}$ mátrixhoz?

$$A=\begin{bmatrix}3&0\\1&3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}2&-5\\1&-3\end{bmatrix}$$

7. Az $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&4&3\\0&3&1\end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát: $(1,5,3)$ és $(3,0,-1)$. Határozzuk meg A összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt!

8. Legyen f az a lineáris transzformáció, amelyre $f(\mathbf{v})=(a,b,c)\times\mathbf{v}$ minden $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$-re. Bizonyítsuk be, hogy f standard mátrixa ferdén szimmetrikus!

9. Adjuk meg az $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ mátrix vektorinvariánsát, azaz azt a $\mathbf{v}$ vektort, amelyre az $\frac{1}{2}(A-A^T)$ mátrix az $\mathbf{r}\to\mathbf{v}\times\mathbf{r}$ standard mátrixa. Írjuk fel az $\mathbf{x}\to A\mathbf{x}$ mátrixát és $\mathbf{v}$ koordinátavektorát a $\mathcal{B}=\{(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})\,\}$ ortonormált bázisban is!