

1. Stabil-e az  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  differenciálegyenlet-rendszer  $\mathbf{0}$  megoldása, ha

a)  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$       b)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$       c)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ?

2. ([www.math24.net](http://www.math24.net), *Differential equations, Stability in the first approximation, Ex. 1*)  
Használjunk elsőrendű közelítést annak ellenőrzésére, hogy az  $\dot{x} = y + 3x^2 + 2y^2$ ,  
 $\dot{y} = -2x - y + xy$  differenciálegyenlet-rendszer  $\mathbf{0}$  megoldása stabil!
3. a) ([www.math24.net](http://www.math24.net), *Differential equations, Method of Lyapunov functions, Ex. 4.*)  
Használjuk a  $V(x, y) = (x + y)^2 + \frac{x^4}{2}$  Ljapunov-függvényt annak bizonyítására, hogy  
az  $\dot{x} = y - 2x$ ,  $\dot{y} = 2x - y - x^3$  differenciálegyenlet-rendszer  $\mathbf{0}$  megoldása stabil!
- b) ([www.math24.net](http://www.math24.net), *Differential equations, Method of Lyapunov functions, Ex. 5.*)  
Válasszunk alkalmas  $a, b$  paramétereket, amelyekkel a  $V(x, y) = ax^2 + by^2$  függvény  
az  $\dot{x} = x + 3y$ ,  $\dot{y} = 2x$  differenciálegyenlet-rendszer instabilitását mutatja!
4. Tekintsük  $\mathbb{R}[x]$ -ben az  $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$  skalárszorzatot!. Ortogonalizáljuk az  
 $\{1, x, x^2\}$  rendszert erre a skalárszorzatra nézve!
5. (23/162) Számítsuk ki annak a  $2\pi$  periódusú  $f(x)$  függvénynek a Fourier-sorát, amely a  
 $(-\pi, \pi]$  intervallumon  $x^2$ -tel egyenlő. Számítsuk ki ennek segítségével a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  sorösszeget!
6. (23/152) Számítsuk ki annak a  $2$  periódusú  $f(x)$  függvénynek a Fourier-sorát, amely a  
 $(-1, 1]$  intervallumon  $|x| - 1$ -gyel egyenlő!