1. Melyik mátrixok diagonalizálhatók $\mathbb{C}$ fölött a következők közül? Mi a Jordan-normálalakja azoknak, amelyek nem diagonalizálhatók?

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Hány olyan nem hasonló komplex mátrix van, amely kielégíti az alábbi feltételeket? Írjuk fel a lehetséges mátrixok Jordan-féle normálalakját!

a) $k(x) = -x^5(x+1)^2, \;\; m(x) = x^3(x+1)$;

b) $k(x) = (x-1)^4 x$, és az 1-hez tartozó sajátaltér 2-dimenziós.

3. Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix n-edik hatványát a diagonális alak segítségével!

Megoldások

1. Az A mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3 + 3x^2 - 6x = -x(x - \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2})(x - \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2})$. A diagonalizálható, mert három különböző sajátértéke van.

B karakterisztikus polinomja $-x^3+3x-2 = -(x-1)^2(x+2)$, tehát sajátértékei 1 és -2. Az 1-hez tartozó sajátaltér a $(B-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldástere, ami csak 1-dimenziós, tehát B Jordan-normálalakjának egy 1-blokkja (2×2-es) és egy -2-blokkja van, és így B nem diagonalizálható.

Mivel C háromszögmátrix, számolás nélkül is leolvasható, hogy sajátértékei az átlós elemei: $1, 2, 3$ és 4. Mivel 4 különböző sajátértéke van a 4×4-es mátrixnak, C szükségképpen diagonalizálható.

D karakterisztikus polinomja x^4, tehát 0 az egyetlen sajátértéke, és D Jordan-normálalakja csak 0-hoz tartozó Jordan-blokkokból áll. D rangja 2, tehát a 0-hoz tartozó sajátaltér $4-2=2$ dimenziós, ezért D Jordan-alakjának két Jordan-blokkja van. $D^2 = 0$, tehát a legnagyobb Jordan-blokk 2×2-es, így a Jordan-normálalak két $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ blokkból álló blokkdiagonális mátrix.

2. a) A karakterisztikus polinomból tudjuk, hogy a Jordan-normálalak 0- és -1-blokkokból áll, az előbbiek összmérete 5, az utóbbiaké 2. A minimálpolinomból kiderül, hogy a legnagyobb 0-blokk mérete 3, a legnagyobb -1-blokké pedig 1. Tehát két lehetőség van: a Jordan-normálalak diagonális blokkjai:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [0], \;\; [0], \;\; [-1], \;\; [-1] \qquad \text{vagy} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \;\; [-1] \;\; [-1]$$

b) A karakterisztikus polinom alapján a mátrix Jordan-normálalakjában 1-blokkok és 0-blokkok lehetnek, 0-blokkból csak egy 1×1-es. Az 1-blokkok összmérete 4, és a sajátaltér dimenziója alapján az 1-blokkok száma 2. Tehát két lehetőség van:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [1], \;\; [0] \qquad \text{vagy} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \;\; [0]$$

3. $|A - xI| = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, így A sajátértékei 2 és -1. A 2-höz tartozó sajátvektorok a $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ skalárszorosai, a -1-hez tartozók az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ skalárszorosai. Tehát a $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ áttérés-mátrixszal $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$. Ebből $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - (-1)^n & -2^{n+1} + 2\cdot(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & -2^n + 2\cdot(-1)^n \end{bmatrix}$$