1. *Bizonyítsuk be, hogy két független, Poisson-eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson-eloszlású!*

Megoldás: Legyenek ξ és η független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, λ, illetve μ paraméterrel. Ekkor

$$P(\xi+\eta=n)=\sum_{k=0}^{n}P(\xi=k,\eta=n-k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k}e^{-(\lambda+\mu)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k}e^{-(\lambda+\mu)}=$$

$$\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k}\right)e^{-(\lambda+\mu)}=\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}\right)e^{-(\lambda+\mu)}=$$

$$\frac{1}{n!}(\lambda+\mu)^n e^{-(\lambda+\mu)}.$$

2. *(34/3 a)) Függetlenek-e a ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek az együttes valószínűségeloszlását a táblázat mutatja?*

$\eta\backslash\xi$	-1	0	1
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	2/9	1/9

Megoldás: A sorösszegek, illetve oszlopösszegek megadják az η, illetve ξ valószínűségeloszlását:

η	1	2
	1/3	2/3

ξ	-1	0	1
	1/2	1/3	1/6

Ebből ellenőrizhető, hogy $P(\eta=k,\xi=\ell)=P(\eta=k)P(\xi=\ell)$ minden $k=1,2$ és $\ell=-1,0,1$ értékre, tehát η és ξ függetlenek.

3. *(34/30-ból) A ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlását a táblázat mutatja. Határozzuk meg ξ és η peremeloszlását, a $\xi+\eta$ és $\xi\eta$ valószínűségi változók eloszlását, és ξ és η kovarianciáját!*

$\eta\backslash\xi$	-1	0	1
0	0.05	0.2	0.1
1	0.2	0.15	0.3

Megoldás:

η	0	1
	0.35	0.65

ξ	-1	0	1
	0.25	0.35	0.4

$\xi+\eta$	-1	0	1	2
	0.05	0.4	0.25	0.3

$\xi\eta$	-1	0	1
	0.2	0.5	0.3

Ebből $c(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=0.1-0.15\cdot 0.65=0.0025.$

4. *Mutassuk meg, hogy a táblázat szerinti eloszlású ξ és η nem függetlenek, de a kovarianciájuk* 0.

$\xi\backslash\eta$	0	1	-1
0	1/2	0	0
1	0	1/4	1/4

Megoldás: A peremeloszlások

ξ	0	1
	1/2	1/2

η	0	1	-1
	1/2	1/4	1/4

ξ és η nem függetlenek, mert például $P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{2}$, de $P(\xi = 0)P(\eta = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Viszont $c(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = (0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4}) - (0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2})(0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4}) = 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$

5. *(34/15 d)) Legyen*

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x^2 + \frac{1}{2}xy) & \textit{ha } 0 < x < 1 \textit{ és } 0 < y < 2 \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$$

a ξ és η együttes sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg a $P(\xi > \eta)$ valószínűséget!

Megoldás: Tetszőleges $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre $P(g(\xi, \eta) < h(\xi, \eta)) = \iint\limits_{g(x,y)<h(x,y)} f_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy$ (és ugyanígy a $\leq$ esetén), így a keresett valószínűség az együttes sűrűségfüggvény integrálja az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > y\}$ halmazon. Mivel a sűrűségfüggvény az $\{(x, y) \,|\, 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\}$ tartományon kívül nulla, elég a két tartomány metszetén integrálni, amely a koordinátatengelyek és az $y = x$ egyenes által határolt háromszög. Tehát

$$P(\xi > \eta) = \iint\limits_{x>y} f_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{7}xy\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{6}{7}x^2 y + \frac{3}{14}xy^2\right]_0^x dy = \int_0^1 \frac{15}{14}x^3\, dx = \left[\frac{15}{56}x^4\right]_0^1 = \frac{15}{56}.$$

6. *(33/107) Egy fafeldolgozó telepen deszkákat készítenek. Ezek hossza normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető, 400 cm várható értékkel, és 3 cm szórással.*

a) A deszkák hány százaléka lesz 398 cm-nél hosszabb, és 401 cm-nél rövidebb?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy deszka hossza a 400 cm-től legalább 2,5 cm-rel eltér?

Megoldás: Legyen ξ egy tetszőleges deszka hossza. Ekkor $\eta = \dfrac{\xi - 400}{3}$ standard normális eloszlású valószínűségi változó.

a) $P(398 < \xi < 401) = P\left(\dfrac{398 - 400}{3} < \dfrac{\xi - 400}{3} < \dfrac{401 - 400}{3}\right) = P(-\frac{2}{3} < \eta < \frac{1}{3}) = \Phi(\frac{1}{3}) - \Phi(-\frac{2}{3}) = \Phi(\frac{1}{3}) - (1 - \Phi(\frac{2}{3})) = \Phi(\frac{1}{3}) + \Phi(\frac{2}{3}) - 1 \approx 0,377$, tehát a deszkáknak körülbelül 37,7%-a lesz 398 és 401 cm közötti hosszúságú.

b) $P(|\xi - 400| \geq 2,5) = P\left(\left|\frac{\xi-400}{3}\right| \geq \frac{2,5}{3}\right) = P(|\eta| \geq \frac{5}{6})$. Az utóbbi valószínűség kiszámításánál felhasználhatjuk, hogy η sűrűségfüggvénye, $\varphi(x)$ szimmetrikus, tehát $P(|\eta| \geq \frac{5}{6}) = 2P(\eta \leq -\frac{5}{6}) = 2(1 - \Phi(\frac{5}{6})) \approx 0,405$.

7. *(33/109) Egy üzemben a készített folyékony termék üvegekbe töltését két automata végzi. Az üvegekbe töltött mennyiség mindkét gép esetében normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető, 2 dl várható értékkel. A betöltött mennyiség szórása az első gépnél 0,14 dl, a másodiknál 0,08 dl. Az üvegek 60%-át az első gép tölti, a többit a második. Mennyi a valószínűsége, hogy egy üveget véletlenszerűen kiválasztva, abban a betöltött anyag mennyisége a várható értéktől 0,1 dl-nél kevesebbel tér el?*

Megoldás: Legyen ξ az első gép, η a második gép által töltött tetszőleges üvegben levő folyadék mennyisége. Ekkor $P(|\xi - 2| \leq 0,1) = P\left(\left|\frac{\xi-2}{0,14}\right| \leq \frac{0,1}{0,14}\right) \approx 2\Phi(\frac{5}{7}) - 1 \approx 0.525$, míg $P(|\eta - 2| \leq 0,1) = P\left(\left|\frac{\xi-2}{0,08}\right| \leq \frac{0,1}{0,08}\right) \approx 2\Phi(1.25) - 1 \approx 0.789$. (Azt használtuk, hogy egy standard normális eloszlású μ valószínűségi változóra $P(|\mu| \leq t) = P(|\mu| < t) = P(\mu < t) - P(\mu \leq -t) = P(\mu < t) - P(\mu < -t) = \Phi(t) - (1 - \Phi(t)) = 2\Phi(t) - 1$.) Így a teljes valószínűség tétele szerint a keresett valószínűség $0.6 \cdot 0.525 + 0.4 \cdot 0,789 \approx 0,63$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy ξ és η független valószínűségi változókra $D^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta)$.*

Megoldás: $D^2(X+Y) = E\big((X+Y)^2\big) - E(X+Y)^2 = E(X^2+2XY+Y^2) - (E(X)+E(Y))^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y)$. Mivel X, Y függetlenek, $E(XY) = E(X)E(Y)$, és emiatt a vegyes tagok kiesnek. Így $D^2(X+Y) = E(X^2) + E(Y^2) - E(X)^2 - E(Y)^2 = D^2(X) + D^2(Y)$. Kihasználtuk, hogy **tetszőleges** X, Y valószínűségi változóra $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

9. *A gyárban egy Túró Rudiba* 25 *gramm tölteléket tesznek,* 2 *gramm szórással, a bevonat tömege* 5 *gramm,* 1 *gramm szórással, a csomagolás pedig* 1 *gramm,* 0 *szórással. Egy dobozba annyi Túró Rudit raknak, hogy összesen éppen elérjék vagy meghaladják az* 1 *kg-ot. Mi a valószínűsége, hogy legalább* 33 *Túró Rudi lesz a csomagban? (Centrális határeloszlástétel)*

Megoldás: Jelölje T_i az i. T.R. tömegét csomagolással együtt. Ezek a T_i-k függetlenek, azonos eloszlásúak. A közös várható értékük $E(T_i) = E(\text{töltelék}) + E(\text{bevonat}) + E(\text{csomag}) = 25+5+1 = 31$, közös szórásnégyzetük $D^2(T_i) = D^2(\text{töltelék}) + D^2(\text{bevonat}) + D^2(\text{csomag}) = 2^2 + 1^2 + 0^2 = 5$. Az, hogy egy dobozba legalább 33 darab kerül, pontosan azt jelenti, hogy 32 T.R. tömegének összege még nem éri el az 1 kg-ot.

Legyen $S_{32} = T_1 + T_2 + \ldots + T_{32}$, ezzel a kérdés: $P(S_{32} < 1000) = ?$ A Centrális határeloszlástétel szerint $P(S_{32} < 1000) = P\left(\frac{S_{32}-32\cdot 31}{\sqrt{32}\sqrt{5}} < \frac{1000-32\cdot 31}{\sqrt{32}\sqrt{5}}\right) \approx \Phi\left(\frac{1000-32\cdot 31}{\sqrt{32}\sqrt{5}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.736$.

10. *(35/22) Bizonyos típusú villanyégők élettartamát normális eloszlásúnak találták, $\sigma = 180$ óra szórással;* 100 *elemű mintavétel során a megvizsgált égők élettartamának átlagára $\bar{x} = 1000$ óra adódott.* 99%*-os megbízhatósági szinten mely intervallumba esik az egész sokaság várható értéke?*

Megoldás: Legyen X_i az i. égő élettartama. Ekkor X_i-k függetlenek és azonos – valamely m várható értékű és $\sigma = 180$ szórású normális – eloszlású valószínűségi változók.

Az m-et tartalmazó intervallumot egy $\bar{X} = 1000$ körüli $[1000-t, 1000+t]$ alakú intervallumként keressük. A 99% bizonyosság azt jelenti, hogy az m-nek az 1000-től vett eltérése 0.99 valószínűséggel kisebb, mint t. Vagyis $P(|1000-m| < t) = 0.99$. Ebből kell t-t meghatározni.

A C.H.T. azt mondja, hogy ha $\bar{X}$ jelöli (a független, azonos eloszlásból vett minták) X_i-k mintaátlagát, akkor elég nagy mintaelemszám esetén $\dfrac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ megközelítőleg standard normális eloszlású, ahol ahol m a sokaság (X_i-k) várható értéke, σ a szórása, n pedig a minta elemszáma. Most $\bar{X} = 1000$, a minta elemszáma $n = 100$, a szórás pedig $\sigma = 180$ adott volt. A C.H.T.-t felhasználva

$$P(|1000-m| < t) = P\left(\left|\frac{1000-m}{180/\sqrt{100}}\right| < \frac{t}{180/\sqrt{100}}\right) \approx 2\Phi\left(\frac{t}{18}\right) - 1.$$

Eszerint t-nek olyannak kell lennie, hogy $2\Phi\left(\frac{t}{18}\right) - 1 = 0.99$ teljesüljön. Tehát a táblázatból az $(1+0.99)/2 = 0.995$-höz tartozó értéket kell visszakeresni. Ez valahol 2.57 és 2.58 között van, számolhatunk 2.575-tel (de akár 2.57-tal vagy 2.58-cal is).

Ebből a t érték már kifejezhető: $t = 18 \cdot 2.575 = 46.35$, így a keresett intervallum $[1000-46.35, 1000+46.35] = [953.65, 1046.35]$.