1. *Legyen* $H = \{(1,2,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,-2,-1),(0,1,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$*, és* $\mathbf{v} = (-1,0,1,0)$.

a) Állapítsuk meg, hogy $\mathbf{v}$ *benne van-e a* $\langle H\rangle$ *altérben, és ha igen, adjuk meg* $\mathbf{v}$ *összes előállítását a négy vektor lineáris kombinációjaként!*

b) Lineárisan független-e a H *vektorhalmaz? Ha nem, válasszunk ki belőle maximális számú független vektort, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként!*

Megoldás: Legyenek a H halmaz vektorai rendre $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$. Az $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}^T$ egyenlet mátrixos alakban $A\mathbf{x} = \mathbf{v}^T$, ahol A oszlopai a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ vektorok oszlopvektor alakban.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

Ebből leolvasható az egyenletrendszer megoldása: $x_3 = t$ tetszőleges valós szám, és a többi a redukált egyenletrendszer soraiból: $x_4 = 1$, $x_2 = -1 + t$ és $x_1 = -t$, vagyis $\mathbf{v} = -t\mathbf{v}_1 + (-1+t)\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}$-re. Következésképpen $\mathbf{v} \in \langle H\rangle$.

A redukált lépcsős alak oszlopai legyenek $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$, $\mathbf{v}_3'$, $\mathbf{v}_4'$ és $\mathbf{v}'$. Ekkor $\langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_3', \mathbf{v}_4'\rangle$-nek bázisát alkotják $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ és $\mathbf{v}_4'$ (azok az oszlopok, amelyekben a vezéregyesek vannak), és $\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'$ is leolvasható a mátrixból. Az elemi sorműveletek nem változtatják meg az oszlopok közötti lineáris kapcsolatokat, tehát az eredeti mátrix oszlopaira igaz: a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\} = (1,2,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,2,1)$ bázisát alkotja $\langle H\rangle$-nak, és $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, azaz $(0,1,-2,-1) = (1,2,-1,0) - (1,1,1,1)$.

2. *Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.*

a) az $\mathbb{R}^2$ *sík tükrözése az* $x = 2$ *egyenesre;*

b) a 2×2*-es mátrixok terén a transzponálás;*

c) az a leképezés, amely minden $\mathbb{R}^2$*-beli vektorhoz a hosszát rendeli;*

d) a konjugálás $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$*-ben;*

e) a sík α *szögű elforgatása az origó körül.*

Megoldás: a) Nem lineáris, mert a $\mathbf{0}$ vektort nem hagyja helyben.

b) Lineáris, mert $(A+B)^T = A^T + B^T$, és $(cA)^T = cA^T$. A vektortér standard bázisa $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, ahol $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A transzponálás hatása a báziselemeken $E_{11} \mapsto E_{11}$, $E_{12} \mapsto E_{21}$, $E_{21} \mapsto E_{12}$ és $E_{22} \mapsto E_{22}$. Az eredményeket koordinátavektoraiból kapjuk a mátrixot: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Másképp: egy $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix koordinátavektora $(a,b,c,d)^T$, a képéé pedig $(a,c,b,d)^T$, és a fenti A az a mátrix, amelyre $A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix}$ az a,b,c,d minden értékére.

c) Nem lineáris, pl. $|-1\cdot(1,0)| = |(-1,0)| = 1 \neq -1\cdot|(1,0)|$.

d) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ standard bázisa $\{1, i\}$, és egy algebrai alakban felírt $x+yi$ komplex szám koordinátavektora $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Olyan A mátrixot keresünk, amelyre $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$, ez pedig az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ebből következik az is, hogy a leképezés valóban lineáris (mert egy mátrixszal való balszorzásként kaphatjuk meg), és hogy a standard mátrixa az A mátrix.

e) Lineáris a leképezés, mert az origót helybenhagyó egybevágóság. Geometriailag láthatjuk, hogy $(1,0) \mapsto (\cos\alpha, \sin\alpha)$, és $(0,1) \mapsto (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, és a képek koordinátavektoraiból összerakhatjuk a standard mátrixot: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. (Egyébként (x,y) képét megkaphatjuk úgy is, ha a forgatást a komplex számsíkon a $\cos\alpha + i\sin\alpha$ számmal való szorzással valósítjuk meg: $(x+yi)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = x\cos\alpha - y\sin\alpha + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$.)

3. *Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a megadott bázisban, illetve bázispárban:*

a) $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} \times (1,2,-1)$ *a standard bázisban;*

b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$*, ahol* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$*;*

c) $p(x) \mapsto p'(x)$ *a legföljebb másodfokú valós polinomok terén, a standard* $\{1, x, x^2\}$ *bázisban.*

Megoldás: a) $(x,y,z)\times(1,2,-1) = (-y-2z, x+z, 2x-y)$, tehát a transzformáció standard mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Az áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, és a mátrix a $\mathcal{B}$ bázisban $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$.

c) $1 \mapsto 0$, $x \mapsto 1$, $x^2 \mapsto 2x$, és a képek koordinátavektora rendre $(0,0,0)^T$, $(1,0,0)^T$ és $(0,2,0)^T$, amiből a mátrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. *Számítsuk ki az* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ *leképezés rangját, ha* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Hány dimenziós* f *képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!*

Megoldás: Hozzuk a mátrixot redukált lépcsős alakra!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből már leolvasható, hogy a mátrix rangja (azaz a képtér dimenziója) 2, mert a lépcsős alakban két nemnulla sor van, a magtér rangja pedig a dimenziótétel alapján $3-2=1$. A redukált lépcsős alak vezéregyesei az első két oszlopban vannak, ezért az A mátrix oszlopterének (azaz a leképezés képterének) bázisát alkotja az első két oszlop: $\{(1,1,2,-1),(1,0,1,0)\}$, a magtér pedig az $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldástere, amely egyenletrendszernek a redukált lépcsős alakja $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Ennek a megoldása $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tehát a magtér bázisa $\{(-1,3,1)\}$.