1. *A mátrix felírása nélkül állapítsuk meg, mik a (valós) sajátértékei és sajátvektorai a következő lineáris transzformációknak:*

a) $\mathbb{R}^3$ *tükrözése az* $(1, 2, 2)$ *vektorra merőleges, az origón átmenő síkra;*
b) $\mathbb{R}^3$ $90°$*-os elforgatása az* x *tengely körül;*
c) $\mathbb{R}^2$ *merőleges vetítése az* $y = 2x$ *egyenesre;*
d) az $(1, 0, 2)$ *vektorral való vektoriális szorzás* $\mathbb{R}^3$*-ben;*

Megoldás: a) A normálvektor, $(1, 2, 2)$, és ennek skalárszorosai $\lambda = -1$-hez tartozó sajátvektorok, a sík nem nulla vektorai pedig $\lambda = 1$-hez tartozók. Más sajátvektora nincs a transzformációnak: a többi nem nulla vektor képe nem párhuzamos az eredeti vektorral.

b) Csak az x tengellyel párhuzamos nem nulla vektorok sajátvektorok (1 sajátértékkel).

c) Az egyenessel párhuzamos nem null vektorok ($(1, 2)$ nem nulla skalárszorosai) az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok, az egyenesre merőlegesek ($(-2, 1)$ nem nulla skalárszorosai) 0-hoz tartozó sajátvektorok.

d) Csak az $(1, 0, 2)$ vektor nem nulla skalárszorosai lesznek sajátvektorok, a hozzájuk tartozó sajátérték 0.

2. *Keressük meg az alábbi mátrixok összes (komplex) sajátértékét és sajátvektorát! Írjuk le az* $\mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x}$ *leképezés hatását* $\mathbb{R}^3$*-ben!*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|A - \lambda I| = \lambda^2 + 1$, a sajátértékek $\pm i$, a sajátvektorok $t \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, illetve $t \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$. Ez a leképezés az $\mathbf{i}$ vektort $\mathbf{j}$-be, a $\mathbf{j}$ vektort pedig $-\mathbf{i}$-be viszi, tehát ez a $90°$-os forgatás $\mathbb{R}^2$-en. Ennek a valós síkon nincs sajátvektora, de mint láttuk $\mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ leképezésként van.

$|B - \lambda I| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, a sajátértékek 1 és 2, a sajátvektorok $t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, illetve $t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$.

$|C - \lambda I| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda) = -(\lambda - 1)\lambda$, a $\lambda = 1$-hez tartozó sajátvektorok $s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ (vagyis az 1-hez tartozó sajátaltér kétdimenziós), a $\lambda = 0$-hoz tartozók pedig $t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$. A leképezés a $(-1, 2, 0)$ és $(3, 0, 2)$ vektorok által kifeszített síkot pontonként helyben hagyja, az $(1, 0, 1)$ vektort pedig $\mathbf{0}$-ba viszi. Ugyanezt csinálja az $\mathbb{R}^3$-nek az $(1, 0, 1)$-gyel párhuzamos irányú vetítése a síkra. Mivel egy bázis vektorain való hatás már meghatározza a leképezést, az $\mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x}$ transzformáció megegyezik az előbb említett vetítéssel.

3. *Melyik mátrixok diagonalizálhatók $\mathbb{R}$ fölött a következők közül? $A^n = ?$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A sajátértékei 1 és 2, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ skalárszorosai. A sajátvektorokból alkotható bázisra való áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, és ezzel $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ diagonális, tehát A diagonalizálható. $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1-2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

B egyetlen sajátértéke -1, és a -1-hez tartozó sajátaltér csak egydimenziós ($\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ skalárszorosai), így nem lehet sajátvektorokból bázist alkotni, vagyis B nem diagonalizálható. (Egyébként ezt a sajátvektorok kiszámítása nélkül is láthatjuk: ha a sajátaltér kétdimenziós lenne, akkor az az egész $\mathbb{C}^2$ lenne, tehát a mátrix minden vektort a -1-szeresébe vinne, és így csak a $-I$ mátrix lehetne.)

C karakterisztikus polinomja $-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$, aminek három különböző gyöke van. Mivel minden gyökhöz tartozik legalább egy sajátvektor, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek, a sajátvektorokból összeállítható egy bázis, vagyis C diagonalizálható.

D karakterisztikus polinomja $-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$. A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér (a $(D-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldástere) kétdimenziós, és a -2-höz tartozó sajátvektor szükségképpen független tőle, tehát az 1 sajátalterének két bázisvektora egy a -2-höz tartozó sajátvektorral együtt bázist alkot, ezért D diagonalizálható.

4. *Mi a Jordan-normálalakja annak a mátrixnak, amelynek karakterisztikus polinomja $k(x) = -(x-1)^2(x-2)^3$ és a minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)^2$?*

Megoldás: A sajátértékek 1 és 2. Az 1-blokkok méretének összege 2, a maximális mérete pedig 1, tehát két 1×1-es 1-blokk van. A 2-blokkok méretének összege 3, a maximális mérete pedig 2, tehát egy 2×2-es és egy 1×1-es 2-blokk van. A Jordan-normálalak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. *Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-normálalakja?*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Megoldás: a) A mátrix karakterisztikus polinomja $-x^2(x-3)$, és mivel a mátrix láthatóan 1 rangú, a 0 sajátaltere $3-1=2$ dimenziós. Tehát létezik sajátvektorokból álló bázis, és így a mátrix Jordan-féle normálalakja diagonális, 0, 0 és 3 diagonális elemekkel.

b) A karakterisztikus polinom $-(x-2)x(x+5)$. Ennek nincs többszörös gyöke, így a minimálpolinomnak sem. Tehát a mátrix diagonalizálható, és a diagonális alakja (egyúttal a Jordan-féle normálalakja) az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában 2, 0 és -5 állnak.

c) A mátrix karakterisztikus polinomja $-(x-2)^2(x+5)$. A 2-höz tartozó sajátaltér 1-dimenziós, ezért a Jordan-normálalakban csak egy 2-blokk van. Ebből a Jordan-normálalak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

6. *Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók az* $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *mátrixhoz?*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|M| = -1$, tehát sem a 9 determinánsú A, sem a 0 determinánsú B nem hasonló M-hez. $k_M(x) = x^2 - 1$, de $k_D(x) = x^2 + x - 1$, tehát D sem hasonló M-hez. (Egy gyorsabban kiszámítható invariáns a mátrix nyoma: a főátlóbeli elemek összege, amely egyébként a karakterisztikus polinomban a $(-x)^{n-1}$ együtthatója, ez M-re, A-ra, B-re és D-re 0, 6, 2 és -1, tehát ez is mutatja, hogy az A, B és D egyike sem hasonló M-hez.) $k_C(x) = k_M(x) = x^2 - 1$, és ennek két különböző gyöke van, tehát M és C is diagonalizálható, és ugyanazok a sajátértékeik (ugyanolyan multiplicitással), így mindketten ugyanahhoz a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ diagonális mátrixhoz hasonlóak, tehát egymáshoz is hasonlóak.

7. *Az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *szimmetrikus mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát:* $(1,5,3)$ *és* $(3,0,-1)$. *Határozzuk meg A összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt!*

Megoldás: Legyen $\mathbf{b}_1 = (1,5,3)^T$ és $\mathbf{b}_2 = (3,0,-1)^T$. Mivel $A\mathbf{b}_1 = (6,30,18)^T = 6\mathbf{b}_1^T$, és $A\mathbf{b}_2 = (3,0,-1) = \mathbf{b}_2$, az ezekhez tartozó sajátértékek 6, illetve 1. A valós szimmetrikus mátrix, ezért a sajátvektoraiból kiválasztható egy ortogonális bázis. Ebből következik, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok eleve merőlegesek, egy sajátaltérben pedig tetszőleges vektort kiegészíthetünk ortogonális bázissá. Ebből következik, hogy $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ is kiegészíthető sajátvektorokból álló ortogonális bázissá, és akkor a harmadik vektor szükségképpen párhuzamos $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = (-5,10,-15)^T$-tel. Legyen $\mathbf{b}_3$ ennek a vektornak alkalmas skalárszorosa, $(1,-2,3)^T$. Erre $A\mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_3$, tehát a harmadik sajátérték -1.

8. *Legyen f az a lineáris transzformáció, amelyre $f(\mathbf{v}) = (a,b,c) \times \mathbf{v}$ minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$-re. Bizonyítsuk be, hogy f standard mátrixa ferdén szimmetrikus!*

Megoldás: Tetszőleges (x,y,z) vektorra $f(x,y,z) = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$, tehát a standard mátrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$, amelyre $A^T = -A$.

9. *Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *mátrix vektorinvariánsát, azaz azt a* $\mathbf{v}$ *vektort, amelyre az* $\frac{1}{2}(A - A^T)$ *mátrix az* $\mathbf{r} \to \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ *standard mátrixa. Írjuk fel az* $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ *mátrixát és* $\mathbf{v}$ *koordinátavektorát a* $\mathcal{B} = \{(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$ *ortonormált bázisban is!*

Megoldás: $\frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, és ebből az előző feladat alapján leolvasható, hogy a vektorinvariáns $\mathbf{v} = (0, -1, 1)^T$. A $\mathcal{B}$ bázisra való áttérés mátrixa P, amelyre

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = P^{-1}AP = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -7 & 4 & -5 \\ -2 & 5 & -13 \\ 1 & 11 & 20 \end{bmatrix},$$

$\frac{1}{2}(B - B^T) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, és $P^{-1}\mathbf{v} = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ valóban a B vektorinvariánsa.