1. *Bizonyítsuk be, hogy az $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (1, 1, 1)$ leképezés bilineáris függvény! Adjuk meg a f Gram-mátrixát a standard bázisban!*

Megoldás: A vektoriális szorzás és a skalárszorzás is lineáris mindkét komponensében, így f bilineáris. Tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorra $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)(1, 1, 1) = u_2v_3 - u_3v_2 + u_3v_1 - u_1v_3 + u_1v_2 - u_2v_1$. Ha A az f mátrixa, akkor a_{ij} az $\mathbf{u}^T A\mathbf{v}$ kifejtésében ($\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ itt a standard koordinátavektoruk helyett áll, tehát oszlopvektornak tekintjük mindkettőt) az u_iv_j együtthatója, ezért $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. *Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixra legyen $f : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$. Adjuk meg az f bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B} = \{(-1, 0), (1, 2)\}$ bázisban!*

Megoldás: Az áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, és az új mátrix

$P^T AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$.

3. *Határozzuk meg az alábbi valós szimmetrikus mátrixok jellegét (pozitív vagy negatív definit, illetve szemidefinit, vagy pedig indefinit)!*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix főminorjai 2, 7 és 12; mindegyik pozitív, ezért A pozitív definit. VAGY: szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizálva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Mindegyik diagonális elem pozitív, tehát A pozitív definit.

A B mátrix főminorjai $+, 0, 0$, így ebből nem tudjuk megállapítani a jelleget. Szimultán sor-oszlopműveletekkel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát B pozitív szemidefinit. Mellesleg ennek a mátrixnak a sajátértékeit is könnyű meghatározni: $3, 0, 0$. (Megj. Olyan mátrix, amelynek a főminorjai $+, 0, 0$, akár indefinit is lehet, pl. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, vagy ugyanez más bázisban: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.)

C-ről átalakítás nélkül is látjuk, hogy indefinit, ugyanis az átlójában van pozitív és negatív szám is, és az átlóbeli értékek éppen az $f(e_i, e_i)$ függvényértékek a mátrix által definiált f bilineáris függvényre.

A D mátrixot is diagonalizáljuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Tehát D indefinit.

4. *Adjuk meg az* $f(x,y) = \sqrt{x+y^2}$ *függvény első és másodfokú Taylor-polinomját* $(3,1)$*-ben. Közelítsük a függvény* $(3.1, 0.9)$ *pontban felvett értékét lineárisan az elsőfokú Taylor-polinom segítségével!*

Megoldás: $f_x = \frac{1}{2}(x+y^2)^{-1/2}$, $f_y = (x+y^2)^{-1/2}y$, $f_{xx} = -\frac{1}{4}(x+y^2)^{-3/2}$, $f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{2}(x+y^2)^{-3/2}y$, $f_{yy} = -(x+y^2)^{-3/2}y^2 + (x+y^2)^{-1/2} = x(x+y^2)^{-3/2}$. Ezeknek az értéke $(3,1)$-ben: $f_x = \frac{1}{4}$, $f_y = \frac{1}{2}$, $f_{xx} = -\frac{1}{32}$, $f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{16}$, $f_{yy} = \frac{3}{8}$. Így az f gradiense a megadott pontban $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, a másodrendű deriválttenzor mátrixa pedig $\begin{bmatrix} -1/32 & -1/16 \\ -1/16 & 3/8 \end{bmatrix}$. Tehát az elsőfokú Taylor-polinom $2 + \frac{1}{4}(x-3) + \frac{1}{2}(y-1)$, a másodfokú pedig $2 + \frac{1}{4}(x-3) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{32}(x-3)^2 - 2\cdot\frac{1}{16}(x-3)(y-1) + \frac{3}{8}(y-1)^2)$. Az elsőfokú Taylor-polinomból $f(3.1, 0.9) \approx 2 + \frac{1}{4}\cdot 0.1 + \frac{1}{2}\cdot(-0.1) = 1.975$. (A másodfokú közelítés 1.97734375, a valódi függvényérték 10 tizedesjegy pontossággal: 1.9773719933.)