3. *Keressük meg az $f(x,y) = x^2 - xy + y$ függvény abszolút szélsőértékeit az $x^2 \leq y \leq x+2$ tartományon!*

Megoldás: A tartomány egy korlátos, zárt halmaz, amit alulról az $y = x^2$, felülről az $y = x+2$ görbe határol. A határoló görbék a $(-1,1)$ és $(2,4)$ pontban metszik egymást. Lehetséges szélsőértékhelyek a tartomány belsejében az f lokális szélsőértékhelyei, a határoló görbék belsejében az f feltételes lokális szélsőértékhelyei, és a csúcsok. Minthogy egy korlátos zárt tartományon folytonos függvénynek mindenképpen van abszolút maximuma és minimuma, elég a szóbajövő kritikus pontokban összehasonlítani a függvényértéket (nem kell feltétlenül ellenőrizni a második deriváltas szélsőértékteszttel, hogy a megtalált kritikus pontok (ahol a derivált, illetve gradiens 0) lokális szélsőértékhelyek-e.

$\nabla f(x,y) = (2x - y, -x + 1) = \mathbf{0}$ a $P_1(1,2)$-ben teljesül, és az benne is van a tartomány belsejében. Az $y = x^2$ $(-1 < x < 2)$ határvonalon $g(x) := f(x, x^2) = 2x^2 - x^3$, $g'(x) = 4x - 3x^2 = 0$ a $P_2(0,0)$ és $P_3(\frac{4}{3}, \frac{16}{9})$ pontokban (ezek a határvonal belső pontjai), viszont a $h(x) := f(x, x+2) = -x + 2$ határvonalon nincs kritikus pont. Így a függvényértékeket a P_1, P_2, P_3 pontokban és az $A(-1,1)$, $B(2,4)$ csúcsokban kell összehasonlítani. A függvényértékek itt 1, 0, $\frac{32}{27}$, 3 és 0, tehát a függvény maximuma 3 (az A pontban), a minimuma pedig 0 (a B és P_2 pontokban).