1. *(Pt. 16/66) Polárkoordináták bevezetésével számítsuk ki a* $\int\limits_0^1 \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} 1\,dx\,dy$ *integrált!*

Megoldás: Az integrálás határai $0 \le y \le 1$ és $y \le x \le \sqrt{2-y^2}$, vagyis alulról és felülről az $y = 0$ és $y = 1$ egyenesek, balról és jobbról az $y = x$ egyenes és az origó körüli $\sqrt{2}$ sugarú kör jobb oldali íve határolják. Felrajzolva az ábrát láthatjuk, hogy a tartomány az előbbi kör első nyolcada (az x tengelytől pozitív irányba indulva). Mivel az 1 integrálja az adott tartomány területe ($\mathbb{R}^3$-beli integrálnál térfogata), az eredmény a nyolcadkör területe, $\frac{1}{8}(\sqrt{2})^2\pi = \frac{\pi}{4}$. Ha mégis kiintegráljuk: a polárkoordinátás határok $0 \le r \le \sqrt{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, és a Jacobi-determináns r, tehát az integrál $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi/4} r\,d\varphi\,dr = \frac{\pi}{4}$.

2. *Számítsuk ki az* $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ *függvény integrálját a* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *kúp és az* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *gömb által közrezárt tartományon!*

Megoldás: Gömbi vagy hengerkoordinátákkal is számolhatunk (gömbi koordinátákkal azért, mert egy origó középpontú gömbnek egy szögekkel jól leírható részéről van szó, hengerkoordinátákkal pedig azért, mert a tartomány hengerszimmetrikus, és az integrandus is kényelmesen felírható hengerkoordinátákkal).

Gömbi koordinátákkal: $\int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2\vartheta \cdot \rho^2 \sin\vartheta\,d\varphi\,d\rho\,d\vartheta = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^1 2\pi\rho^4 \sin^3\vartheta\,d\rho\,d\vartheta = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{2}{5}\pi \sin^3\vartheta\,d\vartheta = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{2}{5}\pi \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\,d\vartheta = \left[\frac{2}{5}\pi(-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{30}(8 - 5\sqrt{2})$.

Hengerkoordinátáknál a síkvetület (origó körüli, $1/\sqrt{2}$ sugarú kör) minden pontja fölött m szerint a kúpfelület és a gömbfelület megfelelő pontja között integrálunk: $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_r^{\sqrt{1-r^2}} r^2 \cdot r\,dm\,d\varphi\,dr = \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^3\sqrt{1-r^2} - r^4\,d\varphi\,dr = \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} 2\pi r^3\sqrt{1-r^2} - 2\pi r^4\,d\varphi\,dr$ Itt az első tagot $u = 1 - r^2$ helyettesítéssel integráljuk: $\int 2\pi r^3\sqrt{1-r^2}\,dr = \int -\pi r^2\sqrt{1-r^2} \cdot (-2r)\,dr = \int -\pi(1-u)\sqrt{u}\,du = \int -\pi u^{1/2} + \pi u^{3/2} = \pi(-\frac{2}{3}u^{3/2} + \frac{2}{5}u^{5/2}) + C = \pi(-\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2} + \frac{2}{5}(1-r^2)^{5/2}) + C$, tehát az eredeti integrál $\pi\left[-\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2} + \frac{2}{5}(1-r^2)^{5/2} - \frac{2}{5}r^5\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{30}(8 - 5\sqrt{2})$.

3. *Keressünk alkalmas koordinátázást az* $x^2 + 4y^2 \le 4$ *tartományon való integráláshoz! Számítsuk ki az ehhez tartozó Jacobi-determinánst, és az* $f(x,y) = x^2$ *függvény integrálját!*

Megoldás: Olyan paraméterzést érdemes választani, amelyiknél az ellipszistartomány határai konstansok. Magát az ellipszist az egyenlet $(x/2)^2 + y^2 = 1$ alakjából $x/2 = \cos u$ és $y = \sin u$-val, azaz $(x,y) = (2\cos u, \sin u)$-val lehet paraméterezni (ahol $0 \le u \le 2\pi$). Ezután minden az origóból az ellipszis adott pontjába vezető szakaszt 0-tól 1-ig terjedő paraméterértékkel paraméterezünk: $\mathbf{r} = (2v\cos u, v\sin u)$, ahol $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 1$. Ehhez a paraméterezéshez a $\mathbf{v}(u,v) = (2v\cos u, v\sin u)$ vektor-vektorfüggvény tartozik, $\operatorname{Grad}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2v\sin u & 2\cos u \\ v\cos u & \sin u \end{bmatrix}$, ennek a determinánsa $J = -2v$, tehát az integráltranszformációnál az integrandust ennek az abszolút értékével, $2v$-vel kell szorozni. Az x^2 függvény integrálja $\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 4v^2\cos^2 u \cdot 2v\,dv\,du = \int\limits_0^{2\pi} 2\cos^2 u\,du = \int\limits_0^{2\pi} 1 + \cos 2u\,du =$

$\left[u + \frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^{2\pi} = 2\pi$.

4. *Számítsuk ki a* $\mathbf{v}(x, y) = (y, xy)$ *függvény integrálját az* $x^2 + y^2 = 4$ *körön pozítív irányban paraméterezéssel, illetve a Green-tétel felhasználásával!*

Megoldás: A kör paraméterezése $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, ebből $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (2\sin t,\ 4\sin t\cos t)$, és az integrál $\int\limits_0^{2\pi} -4\sin^2 t + 8\sin t\cos^2 t\, dt = \int\limits_0^{2\pi} -2 + 2\cos 2t + 8\sin t\cos^2 t\, dt = \left[-2t + \sin 2t - \frac{8}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = -4\pi$.

A Green-tétellel a $\frac{\partial}{\partial x}xy - \frac{\partial}{\partial y}y = y - 1$ függvényt kell integrálni a körlapon, és ez polárkoordinátákra átírva $\int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} ((r\sin\varphi) - 1)r\, d\varphi\, dr = \int\limits_0^2 -2\pi r\, dr = -4\pi$.

5. *Van-e potenciálfüggvénye az alábbi függvényeknek? Amelyiknek van, annak számítsuk ki az integrálját az* $A(1, 1, 1)$*-ből* $B(0, -2, 1)$ *pontba menő szakaszon a potenciálfüggvény segítségével!*

a) $(yz, xz + 2y, xy)$;

b) (x, x, y).

Megoldás: a) A függvény rotációja $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz + 2y & xy \end{vmatrix} = (x - x, y - y, z - z) = \mathbf{0}$, tehát van potenciálfüggvénye, azaz olyan $u(x, y, z)$ függvény, amelyre $u_x = yz$, $u_y = xz + 2y$ és $u_z = xy$. Az első egyenletből $u = \int yz\, dx = xyz + g(y, z)$ valamely x-től nem függő (tehát x tekintetében konstans) g függvényre. Ennek y szerinti $xz + g_y(y, z)$ parciális deriváltját összevetve a második egyenlettel kapjuk, hogy $g_y(y, z) = 2y$, tehát $g(y, z) = y^2 + h(z)$, így $u = xyz + y^2 + h(z)$. Végül a harmadik egyenlet azt adja, hogy $h'(z) = 0$, így $u = xyz + y^2$ $(+C)$. Tehát az integrál $\left[xyz + y^2\right]_{(1,1,1)}^{(0,-2,1)} = 2$.

b) A függvény rotációja $(1, 0, 1) \neq \mathbf{0}$, így nincs potenciálfüggvénye. Persze az integrálját azért ki lehet számítani paraméterezéssel: $\mathbf{r}(t) = (1 - t,\ 1 - 3t, 1)$ $(0 \le t \le 1)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-1, -3, 0)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = (1 - t, 1 - t, 1 - 3t)$, és az integrál $\int\limits_0^1 4t - 4\, dt = -2$.