7. *Milyen próbafüggvényt használnánk ahhoz az állandó együtthatós, inhomogén, lineáris differenciálegyenlethez, amelynek jobb oldalán a következő függvény áll? A karakterisztikus egyenlet milyen gyökei esetén kell még alkalmas x-hatvánnyal megszorozni a próbafüggvényt?*

a) $5x^2 - 1$ *b)* $x \cos 3x$ *c)* $e^{2x} \sin x$

Megoldás: a) $y_p = (Ax^2+Bx+C)x^s$, ha 0 s-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

b) $y_p = ((Ax+B)\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x)x^s$, ha $3i$ s-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

c) $y_p = (Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x)x^s$, ha $2+i$ s-szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

8. *Oldjuk meg a következő speciális jobboldalú, inhomogén lineáris differenciálegyenleteket!*

a) (29/86) $y'' + y' - 6y = x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = -\frac{1}{9}$;

b) $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$.

Megoldás: b) A karakterisztikus egyenlet $m^2 + 4m + 4 = 0$, azaz $(m+2)^2 = 0$, és ennek a -2 kétszeres gyöke. A homogén differenciálegyenlet megoldása $c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$, az inhomogénhez tartozó próbafüggvény pedig $y_p = (Ax+B)e^{-2x} \cdot x^2 = (Ax^3+Bx^2)e^{-2x}$. Deriválás és behelyettesítés után azt kapjuk, hogy $(6Ax+2B)e^{-2x} = xe^{-2x}$ mint függvény, így $A = \frac{1}{6}$ és $B = 0$. Ebből a megoldás: $y = \frac{1}{6}x^3e^{-2x} + c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$.