1. *a) Alakítsuk differenciálegyenlet-rendszerré az* $y''' - 2y'' + y' + 5y = 0$ *differenciálegyenletet!*

b) Alakítsuk magasabbrendű differenciálegyenletté az $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ *differenciálegyenlet-rendszert!*

Megoldás: a) Legyen $y_1 = y$, $y_2 = y'$ és $y_3 = y''$. Ekkor az egyenlet azzal ekvivalens, hogy $y_3' = 2y_3 - y_2 - 5y_1$. Tehát az $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ vektorra $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Kiírva a két egyenletet: $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$ és $\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$. Az elsőből kifejezzük x_2-t: $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_1$, majd behelyettesítjük a másodikba: $-\frac{1}{2}\dot{x}_1 + \frac{1}{2}\ddot{x}_1 = -x_1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\dot{x}_1$, azaz $\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 + 3x_1 = 0$

2. *Legyen* $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. *Számítsuk ki az* e^{tJ}, J^5 *és* $\cos J$ *mátrixokat!*

Megoldás: Ha J egy λ sajátértékhez tartozó $k \times k$-as Jordan-blokk, akkor $f(J)$ első sorában $f(\lambda)$, $\frac{1}{1!}f'(\lambda)$, $\frac{1}{2!}f''(\lambda)$, $\ldots$, $\frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(\lambda)$ áll, és ezeket jobbra eltolva ismételjük.

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & \frac{1}{2}t^2e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \quad J^5 = \begin{bmatrix} 243 & 405 & 270 \\ 0 & 243 & 405 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix} \quad \cos J = \begin{bmatrix} \cos 3 & -\sin 3 & -\frac{1}{2}\cos 3 \\ 0 & \cos 3 & -\sin 3 \\ 0 & 0 & \cos 3 \end{bmatrix}$$

3. *Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket!*

a) $\begin{array}{rcrcr} \dot{x}_1 & = & 4x_1 & - & 5x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 & - & 2x_2 \end{array}$, $\quad x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$.

b) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, *ahol* $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, *ahol* $P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *és* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Megoldás: a) A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -1$, ezekhez egy-egy sajátvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Így a mátrix diagonalizálható, és a differeciálegyenlet-rendszer megoldása $c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t} = c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t}$. A kezdeti feltételt behelyettesítve azt kapjuk, hogy $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, azaz $1 = 5c_1 + c_2$ és $2 = c_1 + c_2$, tehát $c_1 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{9}{4}$, és a kezdetiérték-probléma megoldása $x_1 = -\frac{5}{4}e^{3t} + \frac{9}{4}e^{-t}$ és $x_2 = -\frac{1}{4}e^{3t} + \frac{9}{4}e^{-t}$.

b) Az A mátrix sajátértékei $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, egy-egy sajátvektora pedig $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. Ebből az $\mathbf{x} = c_1\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}e^{(-1+i)t} + c_2\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}e^{(-1-i)t}$ komplex értékű, de valós és képzetes része megadja a valós megoldásokat: $\operatorname{Re}\mathbf{x}+\operatorname{Im}\mathbf{x} = (c_1+c_2)\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{-t} + (c_1-c_2)\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^{-t} = \tilde{c}_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{-t} + \tilde{c}_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^{-t}$.

c) A megoldás

$$\mathbf{x} = Pe^{Jt}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} e^{2t} & (t+1)e^{2t} & 0 \\ -e^{2t} & (-t+1)e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^t \end{bmatrix} \mathbf{c} = c_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} (t+1)e^{2t} \\ (-t+1)e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

4. *Keressünk egy partikuláris megoldást az* $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ 1 \end{bmatrix}$ *inhomogén differenciálegyenlet-rendszerhez, ha* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Megoldás: Az inhomogén tagot $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ összegre bontjuk (ahol az exponenciális rész és a trigonometrikus rész ugyanolyan), és ezekhez külön-külön keresünk megoldást. A sajátértékei 0 és -1, tehát az első függvényhez tartozó próbafüggvényben a polinomok legföljebb nulladfokúak, a második részhez tartozók viszont 0-adfokú helyett legföljebb elsőfokúak. Így az első próbafüggvény $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t$, a második $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} at+b \\ ct+d \end{bmatrix}$. Az elsőt behelyettesítve az $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$ differenciálegyenlet-rendszerbe az $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} a-b+1 \\ 2a-2b \end{bmatrix} e^t$ egyenlőséget kapjuk, amiből $a = \frac{3}{2}$ és $b = 1$, tehát $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$. A másodikat behelyettesítve $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-c)t + (b-d) \\ (2a-2c)t + (2b-2d+1) \end{bmatrix}$, amiből az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ egyenletrendszert kapjuk, és ennek egyik megoldása: $a = -1$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 0$, vagyis $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -t-1 \\ -t \end{bmatrix}$. Tehát $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -t-1+\frac{3}{2}e^t \\ -t+e^t \end{bmatrix}$ az inhomogén differenciálegyenletrendszer egyik megoldása (és ebből a homogén megoldásainak hozzáadásával megkapjuk az összeset).