Matematika M1 gyakorlat – 1. feladatsor
Megoldások

1. Egy medencét két csapon át lehet megtölteni vízzel. Az A esemény jelentse azt, hogy az első, a B esemény azt, hogy a második csapon át folyik víz. Fejezzük ki A-val, ill. B-vel az alábbi eseményeket:

a) Legfeljebb egy csapon folyik víz;

b) Legalább egy csapon folyik víz.

Mit jelent az alábbi esemény?

c) $(A - B) + (B - A)$, ahol is $A - B := A\bar{B}$.

Megoldás. Az elemi események halmaza az alábbi:

$\Omega = \{$1. folyik és 2. nem, 2. folyik és 1. nem, 1. folyik és 2. folyik, 1. nem folyik és 2. sem folyik$\}$,

amely eseményeket rendre A-val, ill. B-vel kifejezve az eseménytér

$$\Omega = \{A \cdot \bar{B},\ B \cdot \bar{A},\ A \cdot B,\ \bar{A} \cdot \bar{B}\}.$$

Ez alapján az egyes események:

$$\text{a) } A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{AB} \qquad \text{b) } A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} + A \cdot B = A + B\ .$$

A c) feladatban az $(A - B) + (B - A) = A\bar{B} + B\bar{A}$ eseményt szavakkal úgy fogalmazhatjuk meg, hogy „az 1. csapon folyik és a 2. csapon nem” VAGY „ A 2. csapon folyik víz és az 1. csapon nem”, vagyis ez éppen azt jelenti, hogy „Pontosan egy csapon folyik víz”.

2. Egy pénzérmével ötször dobunk, és csak azt figyeljük, hogy hány közöttük a „fej”. Mik az elemi események és mik a megfelelő valószínűségek?

Megoldás. A kísérlet lehetséges kimenetelei a dobott fejek száma, vagyis

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

A megfelelő valószínűségek meghatározásához használjuk a klasszikus valószínűségi mező modelljét, azaz

$$\mathbb{P}(\text{„kedvező esemény”}) = \frac{\#\{\text{kedvező kimenetelek}\}}{\#\{\text{összes kimenetel}\}}$$

Az öt érmedobás eredményét tekinthetjük egy öt hosszú, $\{F, I\}$-elemekből képzett vektornak, és mindegyik eredményvektornak ugyanannyi a valószínűsége. (Ebben az esetben a dobások sorrendjére is tekintettel vagyunk.) Az összes lehetséges öt hosszú F/I-vektor száma 2^5, hiszen mind az 5 koordináta egymástól függetlenül 2-féle lehet. Azoknak a kimeneteleknek a száma, amikor i db fejet dobtunk, megegyezik azzal, ahányféleképpen az i db F-et el tudjuk helyezni az egy dobást reprezentáló vektor 5 koordinátáján. Azaz ahányféleképpen ki tudunk választani 5 db helyből i db-ot. Tehát

$$\mathbb{P}(i \text{ (db „fejet” dobtunk)}) = \frac{\binom{5}{i}}{2^5}.$$

3. (Pt. 32/33) Egy kockával ötször dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) legalább egyszer hatost dobunk?

b) öt különböző számot dobunk?

c) az első dobás hatos, a többi nem?

d) pontosan három dobás eredménye megegyezik?

Megoldás. Az öt kockadobás eredményére most is gondolhatunk úgy mint egy öt hosszú vektorra, melynek koordinátái az egyes dobások eredményei, azaz az $1, 2, \ldots, 6$ számok valamelyike.

a) $\mathbb{P}(\#6 \geq 1) = ?$
Egyszerűbb a komplementer esemény valószínűségből meghatározni, hiszen tudjuk, hogy $\mathbb{P}(\#6 \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\#6 \geq 1})$.

$$\mathbb{P}(\overline{\#6 \geq 1}) = \mathbb{P}(\#6 = 0) = \frac{1}{6^5} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(\#6 \geq 1) = 1 - \frac{1}{6^5}.$$

b) $\mathbb{P}(\text{öt különböző}) = ?$
Számoljuk le, hogy hányféle dobássorozat esetén lesz az öt dobás különböző! Az első dobásra még nincs megkötés, ez 6-féle lehet. A második dobás már nem egyezhet meg az első dobással, ezért ez már csak 5-féle lehet. A harmadik dobás nem egyezhet meg sem az első, sem a második dobás eredményével, ezért ez már csak 4-féle lehet, és így tovább. A kedvező esetek száma ebből adódóan $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. Az összes lehetséges dobássorozat száma továbbra is 6^5. A keresett valószínűség:

$$\mathbb{P}(\text{öt különböző}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5}.$$

c) $\mathbb{P}(1.\ „6\text{”}\ \&\ \text{többi nem}) = ?$
Ismét könnyen leszámolhatjuk a kedvező dobásokat. Az első dobás eredménye kötött, csak egy féle lehet. A többi 4 dobás azonban, egymástól függetlenül 5-5-féle lehet, hiszen 6-os már nem lehet. Ezért

$$\mathbb{P}(1.\ „6\text{”}\ \&\ \text{többi nem}) = \frac{1 \cdot 5^4}{6^5}$$

d) $\mathbb{P}(\text{pontosan 3 dobás azonos}) = ?$
A kedvező események leszámlálásakor 3 dolgot kell figyelembevennünk:

- melyik érték jelenik meg pontosan háromszor,
- hányadik dobásokra kaptuk ezeket az értékeket és
- hányféle lehet a maradék két érték[1].

Az $1, 2, \ldots, 6$ értékek bármelyike lehet az, amelyik 3-szor jelenik meg, tehát ez 6-féle lehet. Hogy leszámoljuk a 3 azonos dobás lehetséges pozícióinak számát az öt hosszú vektorban, azt kell meghatároznunk, hogy hányféleképpen tudunk kiválasztani 3 koordinátát az adott 5 koordinátából, amelyekre az azonosak kerülnek. Ez a szám $\binom{5}{3}$. A maradék két dobás már nem egyezhet meg a 3 azonossal és egymással sem, ezért az egyikük lehet 5-féle, míg másikuk 4-féle. A keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\text{pontosan 3 dobás azonos}) = \frac{6 \cdot \binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 4}{6^5}.$$

4. Egy csomag magyar kártyából egyesével kihúzunk 8-at. Mi a valószínűsége, hogy a kihúzottak között lesz két zöld, ha

a) a kihúzott lapokat mindig visszakeverjük,
b) a kihúzott lapokat nem keverjük vissza?

Megoldás. Mindkét esetben – a leszámlálások meghatározásához – egyszerűbb a komplementer esemény valószínűségét megkeresni. Az első esetben gondolhatunk a kihúzott 8 kártyára úgy, mint egy 8 hosszú vektor, amelynek elemei rendre a kihúzott kártyák a kihúzás sorrendjének figyelembevételével. Ekkor

$$\mathbb{P}(\#Z \geq 2) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\#Z \geq 2}\right) = 1 - \mathbb{P}(\#Z = 0 \text{ vagy } \#Z = 1) = 1 - (\mathbb{P}(\#Z = 0) + \mathbb{P}(\#Z = 1)),$$

ahol használtuk, hogy a „zöldek száma 1” és a „zöldek száma 0” egymást kizáró események, ezért a két esemény összegének valószínűsége a két esemény valószínűségének összege. A két esemény valószínűsége

$$\mathbb{P}(\#Z = 0) = \frac{24^8}{32^8}, \text{ ill. } \mathbb{P}(\#Z = 1) = \frac{8 \cdot \binom{8}{1} \cdot 24^7}{32^8},$$

[1] A „pontosan három egyforma” most úgy értendő, hogy a maradék két dobás értéke se legyen azonos. Ha megengedjük, hogy ezek lehessenek azonosak, akkor a két maradék dobás összes lehetséges értékének száma $5 \cdot 5$.

hiszen, ha 0 zöldet húztunk, akkor a 8 húzás mindegyikét egymástól függetlenül a 24 darab nem zöld lapból tettük; míg az 1 zöldet húzhattuk a 8 húzás bármelyikére, és a zöld lapot a 8 darab zöld kártya közül $\binom{8}{1}$ féleképpen választhattuk, a maradék 7 helyre tetszőleges 24 nem zöld érkezhetett. Vagyis a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(\#Z \geq 2) = 1 - \frac{24^8}{32^8} - \frac{8 \cdot \binom{8}{1} \cdot 24^7}{32^8}.$$

A második esetben, ha nem visszatevéssel húzunk gondolhatunk egy kísérlet eredményére úgy mintha a 32 kártyalapból egyszerre vettünk volna ki 8 kártyát (a húzások sorrendjétől eltekintve!). Ezzel az összes lehetséges húzás száma $\binom{32}{8}$. Azoknak a húzásoknak a száma, amikor 0 darab zöldet húzunk $\binom{24}{8}$, hiszen azt számoljuk, hányféleképpen húzhattunk 8 lapot a 24 darab nem zöldből. Az 1 zöldet tartalmazó húzások száma pedig $\binom{8}{1} \cdot \binom{24}{7}$, hiszen az 1 zöldet a 8 darab zöldből, a 7 darab nem zöldet a 24 darab nem zöldből ennyiféleképp húzhattuk ki. A keresett valószínűség így

$$\mathbb{P}(\#Z \geq 2) = 1 - \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} - \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{24}{7}}{\binom{32}{8}}.$$

5. Tegyük fel hogy az A és B események függetlenek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az A és $\bar{B}$ események is függetlenek.

Megoldás. A definíció szerint A és B események függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cdot B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Tehát azt kell belátnunk, hogy $\mathbb{P}(A \cdot \bar{B}) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$.

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}) = \mathbb{P}(A) \cdot (1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cdot B) = \ldots,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél a feladat feltételét (miszerint A és B függetlenek) használtuk. A teljes valószínűség tételének egy alakja azt mondja, hogy $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cdot B) + \mathbb{P}(A \cdot \bar{B})$. Ezzel az előző egyenlőségláncot folytatva

$$\ldots = \mathbb{P}(A \cdot B) + \mathbb{P}(A \cdot \bar{B}) - \mathbb{P}(A \cdot B) = \mathbb{P}(A \cdot \bar{B}).$$

Az egyenlőséglánc két végét összevetve látjuk, hogy A és $\bar{B}$ függetlenek.

6. Egy kockával kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege

a) hét, feltéve, hogy az összeg páratlan,

b) hat, feltéve, hogy van közöttük páratlan?

Megoldás. Jelölje S a két dobás összegét! Az a) feladatban a kérdés tehát az, hogy mennyi a $\mathbb{P}(S = 7 \mid S \text{ páratlan})$ valószínűség. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\mathbb{P}(S = 7 \mid S \text{ páratlan}) = \frac{\mathbb{P}(S = 7 \;\&\; S \text{ páratlan})}{\mathbb{P}(S \text{ páratlan})} = \frac{\mathbb{P}(S = 7)}{\mathbb{P}(S \text{ páratlan})},$$

ugyanis az „$S = 7$ & S páratlan" esemény megegyezik a $S = 7$ eseménnyel. Ennek valószínűségét megkaphatjuk a 7 összegű, ill. összes dobások számának hányadosaként. Ha a két dobás sorrendjére tekintettel vagyunk (csak így lesznek azonos valószínűségűek az elemi események!), az összes lehetséges kimenetel száma $6 \cdot 6 = 36$, a 7 összegű dobások száma pedig $\#\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} = 6$. Hasonlóan egyszerű leszámlálni a páratlan összegű dobások számát, amely 18. Ezzel

$$\mathbb{P}(S = 7 \mid S \text{ páratlan}) = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{1}{3}.$$

A b) kérdésben megint írjuk fel a feltételes valószínűség definícióját

$$\mathbb{P}(S = 6 \mid \text{van páratlan}) = \frac{\mathbb{P}(S = 6 \;\&\; \text{van páratlan})}{\mathbb{P}(\text{van páratlan})}.$$

Számoljuk ki a számlálóban, illetve a nevezőben álló valószínűségeket! A nevezőben ismét célszerűbb a komplementer eseményből kiindulni. Az olyan dobások száma, amelyben nincs páratlan dobás $3 \cdot 3$, hiszen mind az első, mind a második dobás a 3 páros érték valamelyike. Így a nevezőben található valószínűség $\mathbb{P}(\text{van páratlan}) = 1 - 9/36 = 3/4$. Az olyan dobások száma, melyekben van páratlan és a dobott összeg 6 éppen $\#\{(1,5),(3,3),(5,1)\} = 3$. Így a keresett valószínűség

$$\frac{\mathbb{P}(S = 6 \ \& \ \text{van páratlan})}{\mathbb{P}(\text{van páratlan})} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{9}.$$

7. (Pt. 32/109) Valakit keresünk az egyetemen. A keresett személy ugyanakkora valószínűséggel lehet öt adott terem valamelyikében. Annak a valószínűsége, hogy egyáltalán az egyetemen van, $\frac{2}{3}$. Már négy teremben megnéztük, és nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödikben megtaláljuk?

Megoldás. Legyen A_i az az esemény, hogy a keresett személy az i. teremben van, E pedig az az esemény, hogy az illető az egyetemen tartózkodik. Ekkor azt tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A_i \mid E) = 1/5$ minden $i = 1, 2, \ldots, 5$ esetén. A keresett valószínűség pedig $\mathbb{P}(A_5 \mid \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4)$. A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\mathbb{P}(A_5 \mid \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4) = \frac{\mathbb{P}(A_5 \ \& \ \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4)}{\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4)} = \frac{\mathbb{P}(A_5)}{\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4)},$$

mert az A_5 és az $A_5 \cdot \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4$ események megegyeznek. Számítsuk ki $\mathbb{P}(A_5) = \mathbb{P}(A_i)$ valószínűséget!

$$\frac{1}{5} = \mathbb{P}(A_i \mid E) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cdot E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)}{\frac{2}{3}},$$

amiből $\mathbb{P}(A_i) = 2/15$. Így a keresett valószínűség

$$\frac{\mathbb{P}(A_5)}{\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4)} = \frac{\mathbb{P}(A_5)}{1 - \mathbb{P}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)} = \frac{\frac{2}{15}}{1 - \left(\frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15}\right)} = \frac{2}{7}.$$

8. Egy üzemben egy bizonyos alkatrész gyártásával négy gép foglalkozik. Az első naponta 250 alkatrészt gyárt, a második 320-at, a harmadik 200-at, a negyedik 270-et. Az egyes gépeknél a selejtarány rendre 2%, 4%, 3%, 5%. A kész alkatrészeket egy helyen gyűjtik. A gépek napi termeléséből kiveszünk egy alkatrészt.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott alkatrész jó?

b) Az alkatrészt jónak találjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy a negyedik gép gyártotta?

Megoldás. Az a) kérdést a teljes valószínűség tételének segítségével válaszolhatjuk meg. Legyen J az az esemény, hogy a kihúzott csavar jó, és G_i az az esemény, hogy a húzott csavart az i. gép gyártotta ($i = 1, \ldots, 4$).

$$\mathbb{P}(J) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(J \mid G_i) \cdot \mathbb{P}(G_i).$$

Az egyes $\mathbb{P}(J \mid G_i)$ valószínűségeket leolvashatjuk a selejtarányokból, a $\mathbb{P}(G_i)$ valószínűségeket pedig a gyártott csavarok arányából. Tehát

$$\mathbb{P}(J) = (1 - 0,02) \cdot \frac{250}{1040} + (1 - 0,04) \cdot \frac{320}{1040} + (1 - 0,03) \cdot \frac{200}{1040} + (1 - 0,05) \cdot \frac{270}{1040} \approx 0,964.$$

A b) kérdés megválaszolásához pedig használhatjuk a Bayes-tétel, mely szerint

$$\mathbb{P}(G_4 \mid J) = \frac{\mathbb{P}(J \mid G_4) \cdot \mathbb{P}(G_4)}{\mathbb{P}(J)} = \frac{0,95 \cdot \frac{270}{1040}}{0,964} \approx 0,256.$$

9. (Pt. 32/119) Egy egyszerűsített betegségfelismerési vizsgálat $p_1 = 0.95$ valószínűséggel mutatja ki a betegséget azoknál, akiknek van, de $p_2 = 0.01$ valószínűséggel pozitív eredményt mutat azoknál is, akik egészségesek. Becslések szerint a lakosság 4%-a szenved az adott betegségben. Mennyi a valószínűsége annak, hogy valaki

a) tényleg egészséges, ha a vizsgálat annak mutatta?

b) tényleg beteg, ha a vizsgálat annak mutatta?

Megoldás. Jelölje E azt az eseményt, hogy egy véletlenül kiválasztott ember egészséges, hasonlóan B azt, hogy az illető beteg. Legyen „+” az az esemény, hogy egy véletlenül kiválasztott ember tesztje pozitív, hasonlóan $-$ azt, hogy az illető tesztje negatív lett.

a) a keresett $\mathbb{P}(E \mid -)$ valószínűség a Bayes-tétel alapján

$$\mathbb{P}(E \mid -) = \frac{\mathbb{P}(- \mid E) \cdot \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(-)} = \frac{(1 - \mathbb{P}(+ \mid E)) \cdot (1 - \mathbb{P}(B))}{1 - (\underbrace{\mathbb{P}(+ \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(+ \mid E) \cdot \mathbb{P}(E)}_{\mathbb{P}(+)\ \text{T.V.T.}})} =$$

$$= \frac{(1 - 0,01)(1 - 0,04)}{1 - (0,95 \cdot 0,04 + 0,01 \cdot 0,96)} \approx 0,998.$$

b) a keresett $\mathbb{P}(B \mid +)$ valószínűség a Bayes-tétel alapján

$$\mathbb{P}(B \mid +) = \frac{\mathbb{P}(+ \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(+)} = \frac{0,95 \cdot 0,04}{0,95 \cdot 0,04 + 0,01 \cdot 0,96} \approx 0,798.$$

10.* Egy rab egy napon két dobozt és 50 piros, illetve 50 fekete golyót kap. A feladata elosztani a kapott 100 golyót a két doboz között. Eztuán az őr a két doboz valamelyikéből véletlenszerűen kihúz egy golyót. Ha a húzott golyó piros, a rab szabadon távozhat, ha azonban fekete, a rabot másnap kivégzik. Hogyan ossza szét a rab a golyókat, hogy a kiszabadulásának valószínűsége maximális legyen?

Megoldás. Jelölje P azt az eseményt, hogy az őr piros, F pedig azt, hogy az őr fekete golyót húz. Továbbá legyen D_1 az az esemény, hogy az őr az 1. dobozból, D_2 az az esemény, hogy az őr a 2. dobozból húz. A cél maximalizálni a $\mathbb{P}(P)$ valószínűséget. Ez a valószínűség a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P \mid D_1) \cdot \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(P \mid D_2) \cdot \mathbb{P}(D_2) = 0,5 \cdot \mathbb{P}(P \mid D_1) + 0,5 \cdot \mathbb{P}(P \mid D_2).$$

Vegyük észre, hogy $\mathbb{P}(P \mid D_1) \leq 0.5$ vagy $\mathbb{P}(P \mid D_2) \leq 0.5$, mert valamelyik dobozba biztosan kerül legalább annyi fekete, mint piros. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez az első doboz. Ekkor

$$0,5 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(P \mid D_1)}_{\leq 0,5} + 0,5 \cdot \underbrace{\mathbb{P}(P \mid D_2)}_{\leq 1} \leq 0,75.$$

Ehhez közeli valószínűséget el is érhet a rab, ha az egyik dobozba 1 darab piros golyót tesz, a második dobozba pedig az összes többit. Ekkor

$$\mathbb{P}(P) = 0,5 \cdot \frac{49}{99} + 0,5 \cdot 1 \approx 0,7475.$$

Belátható, hogy ennél jobb elrendezés nincs is. Ha ugyanis mindkét dobozban ugyanannyi piros és fekete golyó van, akkor $\mathbb{P}(P) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,5$. Máskülönben valamelyik dobozban több a fekete golyó, mint a piros, és feltehetjük, hogy ez az első doboz. Ha ebben k piros van és $\ell \geq k + 1$ fekete, akkor $2k + 1 \leq k + \ell \leq 100$ miatt $k \leq 49$, és $\mathbb{P}(P|D_1) = \dfrac{k}{k + \ell} \leq \dfrac{k}{2k + 1} = \dfrac{1}{2 + \frac{1}{k}} \leq \dfrac{1}{2 + \frac{1}{49}} = \dfrac{49}{99}$, míg $\mathbb{P}(P|D_2) \leq 1$, és így $\mathbb{P}(P) \leq 0,5 \cdot \dfrac{49}{99} + 0,5 \cdot 1$.