1. Legyen $H = \{(1,2,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,-2,-1),(0,1,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$, és $\mathbf{v} = (-1,0,1,0)$.

a) Állapítsuk meg, hogy $\mathbf{v}$ benne van-e a $\langle H \rangle$ altérben, és ha igen, adjuk meg $\mathbf{v}$ összes előállítását a négy vektor lineáris kombinációjaként!

b) Lineárisan független-e a H vektorhalmaz? Ha nem, válasszunk ki belőle maximális számú független vektort, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként!

2. Melyek invertálhatók az alábbi mátrixok közül? Amelyik invertálható, annak adjuk meg az inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

3. Legyen $\mathcal{B} = (1,2,0),(0,1,2),(1,-1,-5)$ egy bázis $\mathbb{R}^3$-ben.

a) Melyik az a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor, amelyre $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

b) Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (2,2,-3)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisban!

4. Számítsuk ki az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ leképezés $\operatorname{Ker} f = \{\, \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\}$ magterének, és $\operatorname{Im} f = \{\, A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\}$ képterének egy-egy bázisát, ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Mennyi a leképezés rangja?

5. Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.

a) az $\mathbb{R}^2$ sík tükrözése az $x = 2$ egyenesre;

b) a 2×2-es mátrixok terén a transzponálás;

c) az a leképezés, amely minden $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz a hosszát rendeli;

d) a konjugálás $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$-ben;

e) a sík α szögű elforgatása az origó körül.