

1. Adjuk meg a következő lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisban:
- $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} \times (1, 2, -1)$ a standard bázisban;
 - az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}$;
 - $p(x) \mapsto p'(x)$ a legfőbb másodfokú valós polinomok terén, a standard $\{1, x, x^2\}$ bázisban;
2. A mátrix felírása nélkül állapítsuk meg, mik a (valós) sajátértékei és sajátvektorai a következő lineáris transzformációknak. Hány dimenziósak a sajátalterek? Diagonalizálható-e a transzformáció?
- \mathbb{R}^3 tükrözése az $(1, 2, 2)$ vektorra merőleges, az origón átmenő síkra;
 - \mathbb{R}^3 90° -os elforgatása az x tengely körül;
 - \mathbb{R}^2 merőleges vetítése az $y = 2x$ egyenesre;
 - az $(1, 0, 2)$ vektorral való vektoriális szorzás \mathbb{R}^3 -ben;
 - a transzponálás a 2×2 -es valós mátrixok terén.

3. Keressük meg az alábbi mátrixok összes (komplex) sajátértékét és sajátvektorát! Írjuk le az $\mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x}$ leképezés hatását \mathbb{R}^3 -ben!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Melyik mátrixok diagonalizálhatók \mathbb{R} fölött a következők közül? $A^n = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Mi a Jordan-normálalakja annak a mátrixnak, amelynek karakterisztikus polinomja $k(x) = -(x-1)^2(x-2)^3$ és a minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)^2$?

6. Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-normálalakja?

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

7. Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók az $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$