1. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát: $(1,5,3)$ és $(3,0,-1)$. Határozzuk meg A összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt!

2. Legyen f az a lineáris transzformáció, amelyre $f(\mathbf{v}) = (a,b,c) \times \mathbf{v}$ minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$-re. Bizonyítsuk be, hogy f standard mátrixa ferdén szimmetrikus!

3. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix vektorinvariánsát, azaz azt a $\mathbf{v}$ vektort, amelyre az $\frac{1}{2}(A - A^T)$ mátrix az $\mathbf{r} \to \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ standard mátrixa. Írjuk fel az $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ mátrixát és $\mathbf{v}$ koordinátavektorát a $\mathcal{B} = \{(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$ ortonormált bázisban is!

4. Bizonyítsuk be, hogy az $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (1,1,1)$ leképezés bilineáris függvény! Adjuk meg a f Gram-mátrixát a standard bázisban!

5. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixra legyen $f : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$. Adjuk meg az f bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B} = \{(-1,0), (1,2)\}$ bázisban!

6. Határozzuk meg az alábbi valós szimmetrikus mátrixok jellegét (pozitív vagy negatív definit, illetve szemidefinit, vagy pedig indefinit)!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$