1. *(Pt. 33/6. alapján) Legyenek a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei $-2,-1,0,1$, és a hozzájuk tartozó valószínűségek rendre $0.25,\ 0.2,\ 0.35,\ t$.*
a) Adjuk meg t értékét!
b) Adjuk meg az $\eta=\xi^2+1$ valószínűségi változó valószínűségeloszlását és eloszlásfüggvényét!

Megoldás: a) $0.25+0.2+0.35+t=1 \ \Rightarrow\ t=0.2$.

b)

ξ^2+1	4	1	0	1
ξ	-2	-1	0	1
	0.25	0.2	0.35	0.2

$\Rightarrow$

ξ^2+1	0	1	4
	0.35	0.4	0.25

2. *(Pt. 33/9.-ből) Egy dobozban hat cédula van 1-től 6-ig megszámozva. Kihúzunk hármat. ξ értéke legyen a legkisebb kihúzott szám. Adjuk meg ξ valószínűségeloszlását!*

Megoldás: ξ értékkészlete $\{1,2,3,4\}$, és $P(\xi=k)=\dfrac{\binom{6-k}{2}}{\binom{6}{3}}$.

ξ	1	2	3	4
	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

3. *(Pt. 33/18.) Egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye legyen*

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & ha\ x\le 0\\ x/2, & ha\ 0<x\le 1\\ 2/3, & ha\ 1<x\le 2\\ 11/12, & ha\ 2<x\le 3\\ 1, & ha\ 3<x\end{cases}.$$

Számítsuk ki a következő valószínűségeket!
a) $P(\xi=1)$ *b)* $P(2<\xi\le 4)$ *c)* $P(\xi=3)$ *d)* $P(\xi>\frac{1}{2})$

Megoldás: a) $P(\xi=1)=P(\xi\le 1)-P(\xi<1)=\lim\limits_{x\to 1^+}F_\xi(x)-F_\xi(1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

b) $P(2<\xi\le 4)=P(\xi\le 4)-P(\xi\le 2)=\lim\limits_{x\to 4^+}F_\xi(x)-\lim\limits_{x\to 2^+}F_\xi(x)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$.

c) $P(\xi>\frac{1}{2})=1-P(\xi\le\frac{1}{2})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. A számolásnál használhatjuk, hogy ha $F_\xi(x)$ folytonos a-ban, akkor $P(\xi\le a)=\lim\limits_{x\to a^+}F_\xi(x)=F_\xi(a)$.

4. *(Pt. 33/20a)) Mi lehet az A és B paraméterek értéke, ha $F(x)=\begin{cases}0, & ha\ x<1\\ A+\frac{B}{x+1}, & ha\ x\ge 1\end{cases}$ eloszlásfüggvény?*

Megoldás: $1=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=A$, és a bal oldali folytonosság miatt $0=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)=A+\dfrac{B}{2}=1+\dfrac{B}{2}$, amiből $B=-2$. A kapott függvény kielégíti a többi feltételt is: monoton növő, és $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.

5. *Melyik lehet sűrűségfüggvény az alábbi három közül?*

a) $f(x)=\begin{cases}|x|, & ha\ -1<x<1,\\ 0 & különben\end{cases}$ *b)* $f(x)=\begin{cases}x, & ha\ -1<x<1\\ 1, & ha\ 1\le x\le 2\\ 0 & különben\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & ha\ -1\le x\le 1\\ 0 & különben\end{cases}$

Megoldás: A b) kérdésben szereplő függvény nem lehet sűrűségfüggvény, mert negatív értéket is felvesz. A másik kettő ≥ 0, és csak véges sok szakadási pontjuk van, tehát csak az a kérdés, hogy az integráljuk 1-e. Az a) feladatbeli függvény grafikonja alatti terület két 1/2 területű derékszögű háromszögből áll, tehát az integrálja 1, és így a függvény sűrűségfüggvény. A c) feladatbelinek a grafikonja alatti tartomány viszont egy origó középpontú, 1 sugarú félkör, amelynek területe $\frac{\pi}{2} \neq 1$, ezért ez a függvény nem lehet sűrűségfüggvény.

6. *(Pt. 33/41.) Legyenek ξ lehetséges értékei $1, 2, 3$, és a megfelelő valószínűségek $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$. Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!*

Megoldás: $E(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6} \approx 1,833$,
$E(\xi^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{23}{6}$,
$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \frac{23}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{17}{36} \quad \Rightarrow \quad D(\xi) = \frac{\sqrt{17}}{6} \approx 0,687.$

7. *(Pt. 33/50. alapján) A és B a következő játékot játssza. Mindkettőjük előtt van egy 52 lapos franciakártya csomag, jól összekeverve. Felfordítják a legfelső lapot. Ha a két kártya között nincs pikk, de van treff, akkor A nyer, különben B. Ha B nyer, A fizet B-nek 100 forintot. Ha A nyer, mennyit fizessen B, hogy a játék igazságos legyen?*

Megoldás: Legyen a ξ valószínűségi változó értéke az A játékos nyeresége egy játéknál (ha A veszít, akkor ez a ξ negatív). Akkor igazságos a játék, ha ξ várható értéke 0. Legyen x az a pénzösszeg, amit A kap, ha nyer. Ekkor ξ értékkészlete $\{\, x, -100 \,\}$, és $P(\xi = x) = P(\text{nincs pikk, de van treff}) = P(\text{nincs pikk}) - P(\text{nincs pikk, nincs treff}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$, és így $P(\xi = -100) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$. Ebből a várható érték:
$E(\xi) = x \cdot \frac{5}{16} - 100 \cdot \frac{11}{16}$,
ami akkor 0, ha $x = 220$. Tehát B-nek 220 forintot kell fizetnie, ha A nyer.

8. *(Pt. 33/85.) Egy dobozban 30 darab 4-es és 42 darab 6-os csavar van. Belemarkolva kiveszünk 8 csavart.*
a) Mennyi a valószínűsége, hogy lesz közte legalább hat 4-es?
b) Mennyi a kivett 4-es csavarok várható száma?

Megoldás: Legyen ξ a 4-es csavarok száma. Ekkor ξ hipergeometriai eloszlású:
$P(\xi = k) = \dfrac{\binom{30}{k} \cdot \binom{42}{8-k}}{\binom{72}{8}}$.

a) $P(\xi \geq 6) = P(\xi = 6) + P(\xi = 7) + P(\xi = 8) = \dfrac{\binom{30}{6} \cdot \binom{42}{2}}{\binom{72}{8}} + \dfrac{\binom{30}{7} \cdot \binom{42}{1}}{\binom{72}{8}} + \dfrac{\binom{30}{8} \cdot \binom{42}{0}}{\binom{72}{8}} \approx 0,05$

b) A hipergeometriai eloszlás várható értéke np, és ebben az esetben $n = 8$, és $p = \frac{30}{72}$, tehát $E(\xi) = 8 \cdot \frac{30}{72} \approx 3,33$.

9. *(Pt. 33/86. alapján) Egy kockát 12-szer feldobunk. Ha ξ jelöli az ötösdobások számát, mennyi lesz*
a) annak a valószínűsége, hogy legföljebb kétszer dobunk ötöst;
b) annak a valószínűsége, hogy nem dobunk ötöst, feltéve, hogy az ötös-dobások száma legföljebb kettő;
c) a ξ várható értéke?

Megoldás: A ξ valószínűségi változó binomiális eloszlású: $P(\xi = k) = \binom{12}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{12-k}$, ahol $k = 0, 1, \ldots, 12$.

a) $P(\xi \leq 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \binom{12}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{11} + \binom{12}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \frac{151}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,68$

b) $P(\xi = 0|\xi \leq 2) = \dfrac{P(\xi = 0 \text{ és } \xi \leq 2)}{P(\xi \leq 2)} = \dfrac{P(\xi = 0)}{P(\xi \leq 2)} = \dfrac{(\frac{5}{6})^{12}}{\frac{151}{36}(\frac{5}{6})^{10}} = \dfrac{25}{151} \approx 0,166$

c) $M(\xi) = np = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2.$

10. *Ha egy ξ valószínűségi változó valószínűségeloszlása $P(\xi = k) = p_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, akkor $G(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ a ξ generátorfüggvénye.*

a) Bizonyítsuk be, hogy $E(\xi) = G'(1)$ és $D^2(\xi) = G''(1)+E(\xi)-E(\xi)^2 = G''(1)+G'(1)-G'(1)^2$.

b) Vezessük le a generátorfüggvény segítségével a binomiális eloszlás várható értékére és szórására tanult képleteket! (Útmutatás: $G(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k = (px + q)^n$.)

Megoldás:

a) $G'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k x^{k-1} \Rightarrow G'(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kp_k = E(\xi)$

$G''(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k x^{k-2} \Rightarrow G''(1) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k$

$G''(1) + G'(1) = p_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} (k^2 - k + k)p_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = E(\xi^2)$

$G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = D^2(\xi).$

b) $G(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (px)^k q^{n-k} = (px + q)^n$

$G'(x) = n(px + q)^{n-1}p, \quad G''(x) = n(n-1)(px + q)^{n-2}p^2$

$E(\xi) = G'(1) = n(p + q)^{n-1}p = n1^{n-1}p = np, \quad D^2(\xi) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = n(n-1)1^{n-2}p^2 + np - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq.$