1. *(Pt. 33/60) Legyen ξ eloszlásfüggvénye*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x \leq 1 \\ 1 - \frac{2}{x+1}, & ha\ 1 < x. \end{cases}$$

Mennyi ξ várható értéke?

Megoldás: A valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = F'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, ha $x > 1$, és 0, ha $x < 1$. Ebből a várható érték $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx =$ $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{2x+2}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \left[2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1}\right]_1^{\infty}$ lenne, de ez nem konvergens, így ξ-nek nem létezik várható értéke.

2. *(Pt. 33/63)Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} c(x+x^2), & ha\ 2 < x < 4 \\ 0 & különben. \end{cases}$$

a) Mennyi c értéke?
b) Számítsuk ki ξ szórását!

Megoldás: a) $1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{2}^{4} c(x+x^2)\,dx = c\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_2^4 = \frac{74}{3}c$, így $c = \frac{3}{74}$.

b) $E(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int\limits_{2}^{4} \frac{3}{74}(x^2+x^3)\,dx = \left[\frac{3}{74}(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_2^4 = \frac{118}{37}$,

$E(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)\,dx = \int\limits_{2}^{4} \frac{3}{74}(x^3+x^4)\,dx = \left[\frac{3}{74}(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_2^4 = \frac{1938}{185}$.

$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \frac{1938}{185} - \left(\frac{118}{37}\right)^2 \approx 0,305$, és $D(\xi) \approx 0.552$.

3. *(Pt. 33/93) Egy üzem 800 tábla üveget rendel egy üveggyártól. Az üvegben előfordulhatnak kisebb hibák (pl. buborékok). Ezek száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető, táblánként 0,5 várható értékkel.*

a) Határozzuk meg, hogy a 800 leszállított tábla közül várhatóan hány lesz hibátlan, hányban lesz 1, 2, stb. hiba! Számítsuk ki binomiális eloszlással is annak a valószínűségét, hogy egy táblában pontosan két hiba van!
b) Határozzuk meg a hibátlan, az egy, a két hibát tartalmazó táblák várható számát, ha a gyárban a két hibánál többet tartalmazó táblákat kiselejtezik!

Megoldás: a) Legyen ξ az egy táblában levő buborékok száma. A Poisson-eloszlás szerint $P(\xi = k) = \dfrac{0,5^k}{k!}e^{-0,5}$, így
$P(\xi = 0) = e^{-0,5} \approx 0,607$, $P(\xi = 1) = 0,5e^{-0,5} \approx 0,303$ $P(\xi = 2) = 0,125e^{-0,5} \approx 0,076$.
Az üvegtáblákban egymástól függetlenül lesz ennyi buborék, tehát a k darab buborékot tartalmazó üvegtáblák várható értékét a binomiális eloszlás várható értéke alapján adhatjuk meg: $800P(\xi = k)$. Speciálisan a 0, 1, illetve 2 buborékot tartalmazó táblák

várható száma megközelítőleg 485, 243, illetve 61.
Úgy is kiszámíthatjuk a $\xi = k$ valószínűséget, hogy úgy tekintjük, mintha a várható $800 \cdot 0,5 = 400$ hibát a 800 táblában egymástól függetlenül, véletlenszerűen osztanánk el: mindegyik hiba $\frac{1}{800}$ valószínűséggel kerül a kijelölt táblába, és $\frac{799}{800}$ valószínűséggel másikba. Így $P(\xi = k) = \binom{400}{k}\left(\frac{1}{800}\right)^k\left(\frac{799}{800}\right)^{400-k}$, speciálisan $P(\xi = 2) = \binom{400}{2}\left(\frac{1}{800}\right)^2\left(\frac{799}{800}\right)^{398} \approx 0,076$.

b) $P(\xi = 0|\xi \le 2) = \dfrac{e^{-0,5}}{e^{-0,5} + \frac{1}{2}e^{-0,5} + \frac{1}{8}e^{-0,5}} = \dfrac{1}{13/8} = \dfrac{8}{13}$,

$P(\xi = 1|\xi \le 2) = \dfrac{\frac{1}{2}e^{-0,5}}{e^{-0,5} + \frac{1}{2}e^{-0,5} + \frac{1}{8}e^{-0,5}} = \dfrac{1/2}{13/8} = \dfrac{4}{13}$, és

$P(\xi = 2|\xi \le 2) = \dfrac{\frac{1}{8}e^{-0,5}}{e^{-0,5} + \frac{1}{2}e^{-0,5} + \frac{1}{8}e^{-0,5}} = \dfrac{1/8}{13/8} = \dfrac{1}{13}$.

4. *(Pt. 33/96) Egy útkereszteződésnél a percenként áthaladó gépkocsit száma Poisson-eloszlásúnak tekinthető. A tapasztalatok szerint percenként átlagosan* 40 *gépkocsi halad át. A kereszteződést felújítják. Milyen áteresztőképességűnek tervezzék, ha azt akarják, hogy forgalmi dugó kialakulásának legfeljebb 0,05 legyen a valószínűsége még akkor is, ha a forgalom megduplázódik?*

Megoldás: ld. a példatárban

5. *(Pt. 33/102) Egy lánc szemeinek élettartama egymástól független. Ez az élettartam adott terhelés mellett minden szemre exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azonos m várható értékkel. Írjuk fel egy n szemű lánc élettartamának sűrűségfüggvényét!*

Megoldás: ld. a példatárban

6. *(Pt. 33/104) Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra* 6 *percnél többet kell várni, a tapasztalatok szerint* $0,1$. *Mennyi a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen a kúthoz érkezve* 3 *percen belül sorra kerülünk? (A várakozási idő hossza exponenciális eloszlású.)*

Megoldás: ld. a példatárban