1. *Legyen* $H = \{(1,2,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,-2,-1),(0,1,2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$, *és* $\mathbf{v} = (-1,0,1,0)$.

a) Állapítsuk meg, hogy $\mathbf{v}$ *benne van-e a* $\langle H\rangle$ *altérben, és ha igen, adjuk meg* $\mathbf{v}$ *összes előállítását a négy vektor lineáris kombinációjaként!*

b) Lineárisan független-e a H *vektorhalmaz? Ha nem, válasszunk ki belőle maximális számú független vektort, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként!*

Megoldás: Legyenek a H halmaz vektorai rendre $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$. Az $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}^T$ egyenlet mátrixos alakban $A\mathbf{x} = \mathbf{v}^T$, ahol A oszlopai a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ vektorok oszlopvektor alakban.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

Ebből leolvasható az egyenletrendszer megoldása. Azok az ismeretlenek, amelyeknek az oszlopában nincs vezéregyes, szabad változók, tetszőleges értéket vehetnek föl: $x_3 = t$ tetszőleges valós szám, és a többi a redukált egyenletrendszer soraiból: $x_4 = 1$, $x_2 = -1+t$ és $x_1 = -t$, vagyis $\mathbf{v} = -t\mathbf{v}_1 + (-1+t)\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}$-re. Következésképpen $\mathbf{v} \in \langle H\rangle$.

A redukált lépcsős alak oszlopai legyenek $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$, $\mathbf{v}'_3$, $\mathbf{v}'_4$ és $\mathbf{v}'$. Ekkor $\langle \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4\rangle$-nek bázisát alkotják $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ és $\mathbf{v}'_4$ (azok az oszlopok, amelyekben a vezéregyesek vannak), és $\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2$ is leolvasható a mátrixból (a $\mathbf{v}'_3$ koordinátái adják meg a $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$, $\mathbf{v}'_4$ együtthatóit). Az elemi sorműveletek nem változtatják meg az oszlopok közötti lineáris kapcsolatokat, tehát az eredeti mátrix oszlopaira igaz: a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\} = (1,2,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,2,1)$ bázisát alkotja $\langle H\rangle$-nak, és $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, azaz $(0,1,-2,-1) = (1,2,-1,0) - (1,1,1,1)$.

2. *Melyek invertálhatók az alábbi mátrixok közül? Amelyik invertálható, annak adjuk meg az inverzét!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A nem invertálható, mert nem négyzetes, C pedig azért nem invertálható, mert a sorai, illetve az oszlopai — jól láthatóan — nem lineárisan függetlenek. A B invertálása:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

így $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

A D invertálása:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right],$$

így $D^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 10 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. *Legyen $\mathcal{B} = (1,2,0),(0,1,2),(1,-1,-5)$ egy bázis $\mathbb{R}^3$-ben.*

a) Melyik az a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor, amelyre $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

b) Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (2,2,-3)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisban!

Megoldás: A standard bázisból a $\mathcal{B}$-be való áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ éppen az előző feladat D mátrixa (az új báziselemek régi bázisbeli koordinátavektorai alkotják az oszlopait.

a) $[\mathbf{v}]_\mathcal{S} = P[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$, vagyis $\mathbf{v} = (2,1,-7)$

b) $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = P^{-1}[\mathbf{v}]_\mathcal{S} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 10 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathbf{v}$ valóban a három új bázisvektor összege.

4. *Számítsuk ki az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ leképezés* $\operatorname{Ker} f = \{\, \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\}$ *magterének, és* $\operatorname{Im} f = \{\, A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\}$ *képterének egy-egy bázisát, ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Mennyi a leképezés rangja?*

Megoldás: Hozzuk a mátrixot redukált lépcsős alakra!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből már leolvasható, hogy a mátrix rangja (azaz a képtér dimenziója) 2, mert a lépcsős alakban két nemnulla sor van, a magtér dimenziója pedig a dimenziótétel alapján $3 - 2 = 1$. A redukált lépcsős alak vezéregyesei az első két oszlopban vannak, ezért az A mátrix oszlopterének (azaz a leképezés képterének) bázisát alkotja az első két oszlop: $\{(1,1,2,-1),(1,0,1,0)\}$, a magtér pedig az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldástere, amely egyenletrendszernek a redukált lépcsős alakja $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Ennek a megoldása $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tehát a magtér bázisa $\{(-1,3,1)\}$.

5. *Melyik leképezések lineárisak a következők közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban.*

a) az $\mathbb{R}^2$ sík tükrözése az $x = 2$ egyenesre;
b) a 2×2-es mátrixok terén a transzponálás;
c) az a leképezés, amely minden $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz a hosszát rendeli;
d) a konjugálás $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$-ben;
e) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

Megoldás: a) Nem lineáris, mert a $\mathbf{0}$ vektort nem hagyja helyben.

b) Lineáris, mert $(A+B)^T = A^T + B^T$, és $(cA)^T = cA^T$. A vektortér standard bázisa $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, ahol $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ és $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A transzponálás hatása a báziselemeken $E_{11} \mapsto E_{11}$, $E_{12} \mapsto E_{21}$, $E_{21} \mapsto E_{12}$ és $E_{22} \mapsto E_{22}$. Az eredmények koordinátavektoraiból kapjuk a mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Másképp: egy $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix koordinátavektora $(a,b,c,d)^T$, a képéé pedig $(a,c,b,d)^T$, és a fenti A az a mátrix, amelyre $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix}$ az a,b,c,d minden értékére.

c) Nem lineáris, pl. $|-1 \cdot (1,0)| = |(-1,0)| = 1 \neq -1 \cdot |(1,0)|$.

d) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ standard bázisa $\{1, i\}$, és egy algebrai alakban felírt $x + yi$ komplex szám koordinátavektora $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Olyan A mátrixot keresünk, amelyre $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$, ez pedig az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ebből következik az is, hogy a leképezés valóban lineáris (mert egy mátrixszal való balszorzásként kaphatjuk meg), és hogy a standard mátrixa az A mátrix.

e) Lineáris a leképezés, mert az origót helybenhagyó egybevágóság. Geometriailag láthatjuk, hogy $(1,0) \mapsto (\cos\alpha, \sin\alpha)$, és $(0,1) \mapsto (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, és a képek koordinátavektoraiból összerakhatjuk a standard mátrixot: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. (Egyébként (x,y) képét megkaphatjuk úgy is, ha a forgatást a komplex számsíkon a $\cos\alpha + i\sin\alpha$ számmal való szorzással valósítjuk meg: $(x+yi)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = x\cos\alpha - y\sin\alpha + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$.)