1. *Adjuk meg a következő lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisban:*

a) $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} \times (1, 2, -1)$ *a standard bázisban;*

b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, *ahol* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}$;

c) $p(x) \mapsto p'(x)$ *a legföljebb másodfokú valós polinomok terén, a standard* $\{1, x, x^2\}$ *bázisban;*

Megoldás: a) $(x, y, z) \times (1, 2, -1) = (-y - 2z, x + z, 2x - y)$, tehát a transzformáció standard mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Az áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, és a mátrix a $\mathcal{B}$ bázisban $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$.

c) $1 \mapsto 0$, $x \mapsto 1$, $x^2 \mapsto 2x$, és a képek koordinátavektora rendre $(0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$ és $(0, 2, 0)^T$, amiből a mátrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. *A mátrix felírása nélkül állapítsuk meg, mik a (valós) sajátértékei és sajátvektorai a következő lineáris transzformációknak. Hány dimenziósak a sajátalterek? Diagonalizálható-e a transzformáció?*

a) $\mathbb{R}^3$ *tükrözése az* $(1, 2, 2)$ *vektorra merőleges, az origón átmenő síkra;*

b) $\mathbb{R}^3$ $90°$*-os elforgatása az* x *tengely körül;*

c) $\mathbb{R}^2$ *merőleges vetítése az* $y = 2x$ *egyenesre;*

d) az $(1, 0, 2)$ *vektorral való vektoriális szorzás* $\mathbb{R}^3$*-ben;*

e) a transzponálás a 2×2*-es valós mátrixok terén.*

Megoldás: Könnyen belátható, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek egymástól, így akkor és csak akkor diagonalizálható egy mátrix, ha a sajátaltereinek dimenzióösszege egyenlő a vektortér dimenziójával (sőt, elég ellenőrizni, hogy legalább akkora az összeg, mint a vektortér dimenziója). A megoldásokban jelöljük V_λ-val a λ sajátvektorhoz tartozó sajátalteret.

a) A normálvektor, $(1, 2, 2)$, és ennek skalárszorosai $\lambda = -1$-hez tartozó sajátvektorok, a sík nem nulla vektorai pedig $\lambda = 1$-hez tartozók. Más sajátvektora nincs a transzformációnak: a többi nem nulla vektor képe nem párhuzamos az eredeti vektorral. $\dim V_{-1} + \dim V_1 = 1 + 2 = 3$, tehát a transzformáció diagonalizálható.

b) Csak az x tengellyel párhuzamos nem nulla vektorok sajátvektorok (1 sajátértékkel). $\dim V_1 = 1 < 3$, a transzformáció nem diagonalizálható.

c) Az egyenessel párhuzamos nem nulla vektorok ($(1, 2)$ nem nulla skalárszorosai) az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok, az egyenesre merőlegesek ($(-2, 1)$ nem nulla skalárszorosai) 0-hoz tartozó sajátvektorok. $\dim V_1 + \dim V_0 = 1 + 1 = 2$, így a transzformáció diagonalizálható.

d) Csak az $(1, 0, 2)$ vektor nem nulla skalárszorosai lesznek sajátvektorok, a hozzájuk tartozó sajátérték 0. $\dim V_0 = 1 < 3$, így a transzformáció nem diagonalizálható.

e) A transzponálás a diagonális elemeket helyben hagyja, tehát ha van az átlóban nem 0 elem, akkor a sajátérték csak 1 lehet, és az ehhez tartozó mátrixok a szimmetrikus mátrixok ($A^T = A$). Ha minden diagonális elem 0, akkor van olyan $i \neq j$, hogy $a_{ij} \neq 0$, és $a_{ij} = \lambda a_{ji}$, $a_{ji} = \lambda a_{ij}$, amiből $\lambda^2 = 1$, és ez az előzőn kívül a $\lambda = -1$ esetet adja, amelyhez tartozó sajátvektorok a ferdén szimmetrikus mátrixok ($A^T = -A$). $\dim V_1 + \dim V_{-1} = 3 + 1 = 4$, tehát a transzformáció diagonalizálható.

3. *Keressük meg az alábbi mátrixok összes (komplex) sajátértékét és sajátvektorát! Írjuk le az* $\mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x}$ *leképezés hatását* $\mathbb{R}^3$*-ben!*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|A - \lambda I| = \lambda^2 + 1$, a sajátértékek $\pm i$, a sajátvektorok $t \cdot \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$, illetve $t \cdot \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ ($t \neq 0$). Ez a leképezés az $\mathbf{i}$ vektort $\mathbf{j}$-be, a $\mathbf{j}$ vektort pedig $-\mathbf{i}$-be viszi, tehát ez a 90°-os forgatás $\mathbb{R}^2$-en. Ennek a valós síkon nincs sajátvektora, de mint láttuk $\mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ leképezésként van.
$|B - \lambda I| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, a sajátértékek 1 és 2, a sajátvektorok $t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, illetve $t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ($t \neq 0$).

$|C - \lambda I| = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda) = -(\lambda - 1)\lambda$, a $\lambda = 1$-hez tartozó sajátvektorok $s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ (vagyis az 1-hez tartozó sajátaltér kétdimenziós), a $\lambda = 0$-hoz tartozók pedig $t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($t \neq 0$). A leképezés a $(-1, 2, 0)$ és $(3, 0, 2)$ vektorok által kifeszített síkot pontonként helyben hagyja, az $(1, 0, 1)$ vektort pedig $\mathbf{0}$-ba viszi. Ugyanezt csinálja az $\mathbb{R}^3$-nek az $(1, 0, 1)$-gyel párhuzamos irányú vetítése a síkra. Mivel egy bázis vektorain való hatás már meghatározza a leképezést, az $\mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x}$ transzformáció megegyezik az előbb említett vetítéssel.

4. *Melyik mátrixok diagonalizálhatók* $\mathbb{R}$ *fölött a következők közül?* $A^n = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A sajátértékei 1 és 2, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ skalárszorosai. A sajátvektorokból alkotható bázisra való áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, és ezzel $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ diagonális, tehát A diagonalizálható. $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - 2^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

B egyetlen sajátértéke -1, és a -1-hez tartozó sajátaltér csak egydimenziós ($\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ skalárszorosai), így nem lehet sajátvektorokból bázist alkotni, vagyis B nem diagonalizálható. (Egyébként ezt a sajátvektorok kiszámítása nélkül is láthatjuk: ha a sajátaltér kétdimenziós lenne, akkor az az egész $\mathbb{C}^2$ lenne, tehát a mátrix minden vektort a -1-szeresébe vinne, és így csak a $-I$ mátrix lehetne.)

C karakterisztikus polinomja $-x(x-1)(x+1)$, aminek három különböző gyöke van. Mivel minden gyökhöz tartozik legalább egy sajátvektor, a sajátalterek dimenzióinak összege legalább a vektortér dimenzióját adja, így C diagonalizálható.

D karakterisztikus polinomja $-(x-1)^2(x+2)$. A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér (a $(D-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldástere) kétdimenziós, így $\dim V_1 + \dim V_{-2} \geq 2+1 = 3$, tehát D diagonalizálható.

5. *Mi a Jordan-normálalakja annak a mátrixnak, amelynek karakterisztikus polinomja $k(x) = -(x-1)^2(x-2)^3$ és a minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)^2$?*

Megoldás: A sajátértékek 1 és 2. Az 1-blokkok méretének összege 2, a maximális mérete pedig 1, tehát két 1×1-es 1-blokk van. A 2-blokkok méretének összege 3, a maximális mérete pedig 2, tehát egy 2×2-es és egy 1×1-es 2-blokk van. A Jordan-normálalak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. *Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-normálalakja?*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Megoldás: a) A mátrix karakterisztikus polinomja $-x^2(x-3)$, és mivel a mátrix láthatóan 1 rangú, a 0 sajátaltere $3-1=2$ dimenziós. Tehát létezik sajátvektorokból álló bázis, és így a mátrix Jordan-féle normálalakja diagonális, 0, 0 és 3 diagonális elemekkel.

b) A karakterisztikus polinom $-(x-2)x(x+5)$. Ennek nincs többszörös gyöke, így a minimálpolinomnak sem. Tehát a mátrix diagonalizálható, és a diagonális alakja (egyúttal a Jordan-féle normálalakja) az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában 2, 0 és -5 állnak.

c) A mátrix karakterisztikus polinomja $-(x-2)^2(x+5)$. A 2-höz tartozó sajátaltér 1-dimenziós, ezért a Jordan-normálalakban csak egy 2-blokk van. Ebből a Jordan-normálalak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

7. *Az alábbi mátrixok közül melyek hasonlók az $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz?*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|M| = -1$, tehát sem a 9 determinánsú A, sem a 0 determinánsú B nem hasonló M-hez. $k_M(x) = x^2 - 1$, de $k_D(x) = x^2 + x - 1$, tehát D sem hasonló M-hez. (Egy gyorsabban kiszámítható invariáns a mátrix nyoma: a főátlóbeli elemek összege, amely egyébként a karakterisztikus polinomban a $(-x)^{n-1}$ együtthatója, ez M-re, A-ra, B-re és D-re 0, 6, 2 és -1, tehát ez is mutatja, hogy az A, B és D egyike sem hasonló M-hez.) $k_C(x) = k_M(x) = x^2 - 1$, és ennek két különböző gyöke van, tehát M és C is diagonalizálható, és ugyanazok a sajátértékeik (ugyanolyan multiplicitással), így mindketten ugyanahhoz a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ diagonális mátrixhoz hasonlóak, tehát egymáshoz is hasonlóak.