1. *Az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *szimmetrikus mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát:* $(1,5,3)$ *és* $(3,0,-1)$. *Határozzuk meg* A *összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt!*

Megoldás: Legyen $\mathbf{b}_1 = (1,5,3)^T$ és $\mathbf{b}_2 = (3,0,-1)^T$. Mivel $A\mathbf{b}_1 = (6,30,18)^T = 6\mathbf{b}_1^T$, és $A\mathbf{b}_2 = (3,0,-1)^T = \mathbf{b}_2$, az ezekhez tartozó sajátértékek 6, illetve 1. A valós szimmetrikus mátrix, ezért a sajátvektoraiból kiválasztható egy ortogonális bázis. Ebből következik, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok eleve merőlegesek, egy sajátaltérben pedig tetszőleges $\neq \mathbf{0}$ vektort kiegészíthetünk ortogonális bázissá. Ebből következik, hogy $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ is kiegészíthető sajátvektorokból álló ortogonális bázissá, és akkor a harmadik vektor szükségképpen párhuzamos $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = (-5,10,-15)^T$-tel. Legyen $\mathbf{b}_3$ ennek a vektornak alkalmas skalárszorosa, $(1,-2,3)^T$. Erre $A\mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_3$, tehát a harmadik sajátérték -1.

2. *Legyen* f *az a lineáris transzformáció, amelyre* $f(\mathbf{v}) = (a,b,c) \times \mathbf{v}$ *minden* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$*-re. Bizonyítsuk be, hogy* f *standard mátrixa ferdén szimmetrikus!*

Megoldás: Tetszőleges (x,y,z) vektorra $f(x,y,z) = (bz - cy, cx - az, ay - bx)$, tehát a standard mátrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$, amelyre $A^T = -A$.

3. *Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *mátrix vektorinvariánsát, azaz azt a* $\mathbf{v}$ *vektort, amelyre az* $\frac{1}{2}(A - A^T)$ *mátrix az* $\mathbf{r} \to \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ *standard mátrixa. Írjuk fel az* $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ *mátrixát és* $\mathbf{v}$ *koordinátavektorát a* $\mathcal{B} = \{(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$ *ortonormált bázisban is!*

Megoldás: $\frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, és ebből az előző feladat alapján leolvasható, hogy a vektorinvariáns $\mathbf{v} = (0,-1,1)^T$. A $\mathcal{B}$ bázisra való áttérés mátrixa P, amelyre

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ P^{-1} = P^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = P^{-1}AP = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & 4 & -5 \\ -2 & 5 & -13 \\ 1 & 11 & 20 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}(B - B^T) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, és $P^{-1}\mathbf{v} = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ valóban a B vektorinvariánsa.

4. *Bizonyítsuk be, hogy az* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (1,1,1)$ *leképezés bilineáris függvény! Adjuk meg a* f *Gram-mátrixát a standard bázisban!*

Megoldás: A vektoriális szorzás és a skalárszorzás is lineáris mindkét komponensében, így f bilineáris. Tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ vektorra $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)(1,1,1) = u_2v_3 - u_3v_2 + u_3v_1 - u_1v_3 + u_1v_2 - u_2v_1$. Ha A az f mátrixa, akkor a_{ij} az $\mathbf{u}^T A\mathbf{v}$ kifejtésében ($\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ itt a standard koordinátavektoruk helyett áll, tehát oszlopvektornak tekintjük mindkettőt) az $u_i v_j$ együtthatója, ezért $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

5. *Az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrixra legyen* $f : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$. *Adjuk meg az* f *bilineáris függvény mátrixát a* $\mathcal{B} = \{(-1, 0), (1, 2)\}$ *bázisban!*

Megoldás: Az áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, és az új mátrix

$$P^T A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}.$$

6. *Határozzuk meg az alábbi valós szimmetrikus mátrixok jellegét (pozitív vagy negatív definit, illetve szemidefinit, vagy pedig indefinit)!*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrix főminorjai 2, 7 és 12; mindegyik pozitív, ezért A pozitív definit. VAGY: szimultán sor-oszlopműveletekkel diagonalizálva:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} \end{bmatrix}$$

Mindegyik diagonális elem pozitív, tehát A pozitív definit.

A B-nél használhatjuk a 6/6.a) feladatban meghatározott sajátértékeket: 0, 0, 3, amiből látszik, hogy a mátrix pozitív szemidefinit. De diagonalizálhatjuk is a mátrixot szimultán sor-oszlopműveletekkel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A C mátrixról rögtön leolvasható, hogy indefinit, mert az átlójában pozitív és negatív számok is vannak ($e_2^T C e_2 = c_{22} = -1$ és $e_3^T C e_3 = c_{33} = 1$).

A D mátrix főminorjai között 0 is van, tehát nem tudjuk azokból megállapítani a jellegét. Diagonalizáljuk D-t szimultán sor-oszlopműveletekkel!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Itt szükség van arra, hogy a harmadik sort hozzáadjuk a másodikhoz (és persze a megfelelő oszlopműveletet is elvégezzük), hogy utána tudjunk a második sorral nullázni.

$$\overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{sor}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \overset{oszlop}{\mapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

A diagonális alakból leolvasható, hogy a D mátrix indefinit.