1. *Adjuk meg az $f(x,y) = x^y$ függvény első és másodfokú Taylor-polinomját $(1,3)$-ban, és használjuk ezeket a függvény $(1.1, 2.8)$ pontban felvett értékének közelítésére!*

Megoldás:

$$f = x^y, \quad f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \ln x,$$

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \quad f_{yy} = x^y \ln^2 x,$$

és az $(1,3)$-ban felvett értékeik: 1, 3, 0, 6, 1, 1 és 0. Így az elsőfokú Taylor-polinom

$$T_1(x,y) = 1 + 3(x-1) + 0(y-3) = 1 + 3(x-1),$$

a másodfokú pedig

$$T_2(x,y) = 1+3(x-1)+0(y-3)+\frac{1}{2!}(6(x-1)^2+(x-1)(y-3)+(y-3)(x-1)+0(y-3)^2) =$$

$$= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)(y-3).$$

Ennek alapján $1.1^{2.8} \approx T_1(1.1, 2.8) = 1 + 3 \cdot 0.1 = 1.3$, vagy egy kicsit jobb közelítéssel $1.1^{2.8} \approx T_2(1.1, 2.8) = 1.3 + 3 \cdot 0.01 - 0.02 = 1.31$.

2. *(Pt. 15/64) Keressük meg az $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ függvény lokális szélsőértékeit!*

Megoldás: f polinom, tehát mindenütt differenciálható. Szélsőértéke csak ott lehet, ahol $\nabla f = \mathbf{0}$. Az $f_x = 3x^2 - 3y = 0$ és $f_y = 3y^2 - 3x = 0$ egyenletrendszer megoldása $P_1(0,0)$ és $P_2(1,1)$. A másodrendű deriválttenzor mátrixa $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$. Ez P_1-ben $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, aminek a determinánsa negatív, és 2×2-es mátrix esetén ebből következik, hogy a mátrix csak indefinit lehet, tehát f-nek P_1-ben nincs szélsőértéke; P_2-ben $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$, aminek a determinánsa pozitív, és az első főminorja ($f_{xx} = 6$) is pozitív, ezért P_2-ben f-nek lokális minimuma van, amelynek értéke -1.

3. *(Pt. 15/75) Keressük meg az $f(x,y,z) = yz - 2x + 3z - (x^2 + y^2 + z^2)$ függvény lokális szélsőértékeit!*

Megoldás: f mindenütt differenciálható függvény. A függvénynek csak ott lehet lokális szélsőértéke, ahol $\nabla f = \mathbf{0}$. Az $f_x = -2 - 2x = 0$, $f_y = z - 2y = 0$, $f_z = y + 3 - 2z = 0$ egyenletrendszer egyetlen megoldása $P(-1,1,2)$. A másodrendű deriválttenzor mátrixa $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (minden x, y, z-re). Ennek a főminorjai (a bal fölső sarokdeterminánsai) -2, 4 és -6 váltakozó előjelűek negatívval kezdve, így a mátrix negatív definit, és így f-nek lokális maximuma van $P(-1,1,2)$-ben, az értéke pedig 4. (A mátrix jellegét szimultán sor-oszlopműveletekkel való diagonalizálás segítségével is megállapíthattuk volna.)

4. *Keressük meg az $f(x,y) = x^2 - xy + y$ függvény abszolút szélsőértékeit az $x^2 \le y \le x + 2$ tartományon!*

Megoldás: Az f függvény folytonos, így a megadott korlátos zárt tartományon (a paraboladarab és az egyenes közötti tartományon) létezik abszolút maximuma és minimuma. Ha ezt belső pontban veszi fel, akkor ott lokális szélsőértéke is van, tehát ott $\nabla f = \mathbf{0}$. Ha valamelyik határvonal belsejében van abszolút szélsőértéke, az feltételes lokális szélsőérték. És lehet abszolút szélsőértéke valamelyik csúcsban is (ezek koordinátái az $y = x^2$, $y = x+2$ egyenletrendszer megoldásából adódóan $A(-1, 1)$ és $B(2, 4)$).

A tartomány belsejének a kritikus pontjait az $f_x = 2x - y = 0$, $f_y = -x + 1 = 0$ egyenletrendszer megoldása adja: $P_1(1, 2)$ valóban belső pont.

Az $y = x^2$ $(-1 < x < 2)$ határvonalon a $g(x) = f(x, x^2) = 2x^2 - x^3$ függvény kritikus pontjait kell megkeresnünk; $g'(x) = 4x - 3x^2 = 0$, ha $x = 0$ vagy $x = \frac{4}{3}$, ez adja a $P_2(0, 0)$, $P_3(\frac{4}{3}, \frac{16}{9})$ pontokat.

Végül az $y = x + 2$ $(-1 < x < 2)$ határvonalon a $h(x) = f(x, x + 2) = -x + 2$-nek nincs kritikus pontja ($h'(x) = 1$).

A P_1, P_2, P_3, A és B pontbeli értékeket összehasonlítva: $f(P_1) = 1$, $f(P_2) = 0$, $f(P_3) = \frac{32}{27}$, $f(A) = 3$, $f(B) = 0$ azt látjuk, hogy f abszolút maximuma 3, és ezt P_3-ban veszi föl, abszolút minimuma pedig 0, és ezt P_2-ben és B-ben is fölveszi.

5. *Feltételes szélsőértékként határozzuk meg az $x^3+y^3 = 1$ egyenlettel megadott görbe origóhoz legközelebbi és origótól legtávolabbi pontjait!*

Megoldás: A görbének nyilvánvalóan nincs origótól legtávolabbi pontja, ugyanis akármilyen nagy x-hez van olyan (negatív) y, amelyre $x^3 + y^3 = 1$. Viszont legközelebbi pontja van, mert azt a görbe egy origó körüli körbe eső véges darabjáról választhatjuk ki, és a folytonos távolságfüggvénynek ezen a korlátos görbedarabon van abszolút minimuma. A távolságfüggvény helyett nézzük a távolságnégyzetet: $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ennek a függvénynek a minimumát keressük az $x^3 + y^3 - 1 = 0$ feltétel mellett. A Lagrange-multiplikátor módszere szerint ehhez elég a $h(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 + y^3 - 1)$ háromváltozós függvény kritikus pontjait megvizsgálni. A $h_x = 2x + 3\lambda x^2 = 0$, $h_y = 2y + 3\lambda y^2 = 0$ és $x^3 + y^3 - 1 = 0$ egyenletrendszer (x, y, z) megoldására lehet $x = 0$, és akkor a harmadik egyenlet miatt $y = 1$, vagy $y = 0$, és akkor a harmadik egyenletből $x = 1$. Végül ha x, y egyike sem 0, akkor $x = -\frac{2}{3\lambda} = y$, tehát a harmadik egyenlet miatt $x = y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Így a lehetséges minimumhelyek $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 0)$ és $P_3(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$, és ezek közül az első kettőben veszi föl az f függvény a minimumát, 1-et.

6. *(Pt. 18/2-ből) Határozzuk meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, xz\right)$ vektor-vektorfüggvény deriválttenzorának standard mátrixát, divergenciáját és rotációját egy tetszőleges (x, y, z) pontban!*

Megoldás:

$$Grad_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \\ z & 0 & x \end{bmatrix}, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + x, \ \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{y} & \frac{y}{z} & xz \end{vmatrix} = \left(\frac{y}{z^2}, -z, \frac{x}{y^2}\right)$$

7. *(Pt. 16/35) Az integrálás sorrendjének cseréjével (és a határok alkalmas megváltoztatásával) számítsuk ki az $\int\limits_0^1 \int\limits_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$ integrált!*

Megoldás: Az integrálási tartomány az $y \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ egyenlőtlenségekkel van megadva. Tehát balról és jobbról az $x = y$ egyenes, illetve az $x = 1$ egyenes határolja, és az ezek közötti tartománynak az $y = 0$-tól $y = 1$-ig terjedő részét vesszük, ami éppen a

$(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ csúcsú háromszög. Ha y szerint integrálunk először, akkor y az $y=0$ és $y=x$ görbe között mozog, és a tartomány maximális kiterjedése x irányában 0-tól 1-ig tart. Tehát az integrál $\int\limits_0^1\int\limits_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int\limits_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$.

8. *(Pt. 16/48) Számítsuk ki az $y=0$, $y=x^2-4$, $z=0$ és $z=y+8$ felületek által meghatározott tartomány térfogatát!*

Megoldás: Az $y=0$ és $y=x^2-4$ felületek az xy-síkban ugyanilyen egyenletű egyenes és parabola által határolt tartományra állított hengerszerű tartományt határolnak, amit alulról a $z=0$, felülről a $z=y+8$ sík zár le (itt a $z=y+8$ sík végig a $z=0$ sík fölött marad). Tehát ha V-vel jelöljük a térbeli tartományt, és T-vel az xy-síkra vett vetületét, akkor a V térfogata:

$$\iiint\limits_V 1\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_T \int\limits_0^{y+8} 1\,dz\,dy\,dx = \int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{x^2-4}^{0}\int\limits_0^{y+8} 1\,dz\,dy\,dx = \int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{x^2-4}^{0} y+8\,dy\,dx =$$

$$\int\limits_{-2}^{2}\left[\frac{1}{2}y^2+8y\right]_{x^2-4}^{0}dx = \int\limits_{-2}^{2} -\frac{1}{2}x^4-4x^2+24\,dx = \left[-\frac{1}{10}x^5-\frac{4}{3}x^3+24x\right]_{-2}^{2} = \frac{1024}{15}.$$